

2層 k -平面性と外 k -平面性判定の パラメータ化計算量

Yasuaki Kobayashi
(Hokkaido University)

Yuto Okada
(Nagoya University)

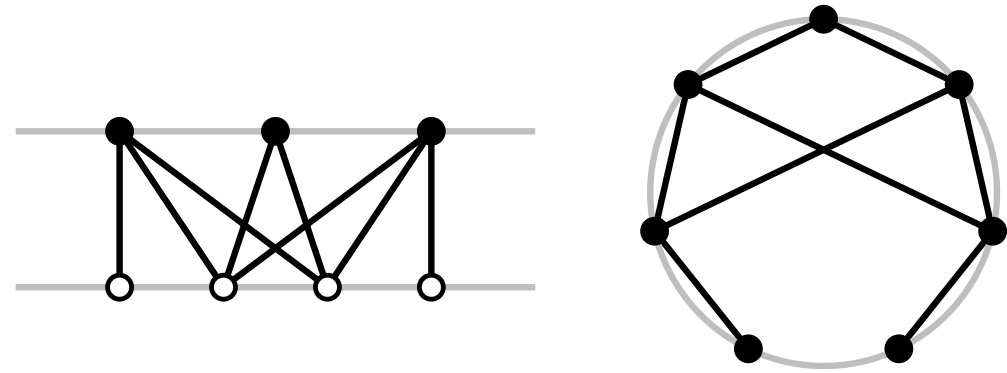
Alexander Wolff
(Universität Würzburg)

2025-05-31 @ 未来を担う若手研究者の集い
最適化の理論とアルゴリズム (RAOTA)

本研究の概要

グラフ描画分野では，これらの問題がよく研究されている．

- 片面交差数最小化問題
- 両面交差数最小化問題
- 円形交差数最小化問題

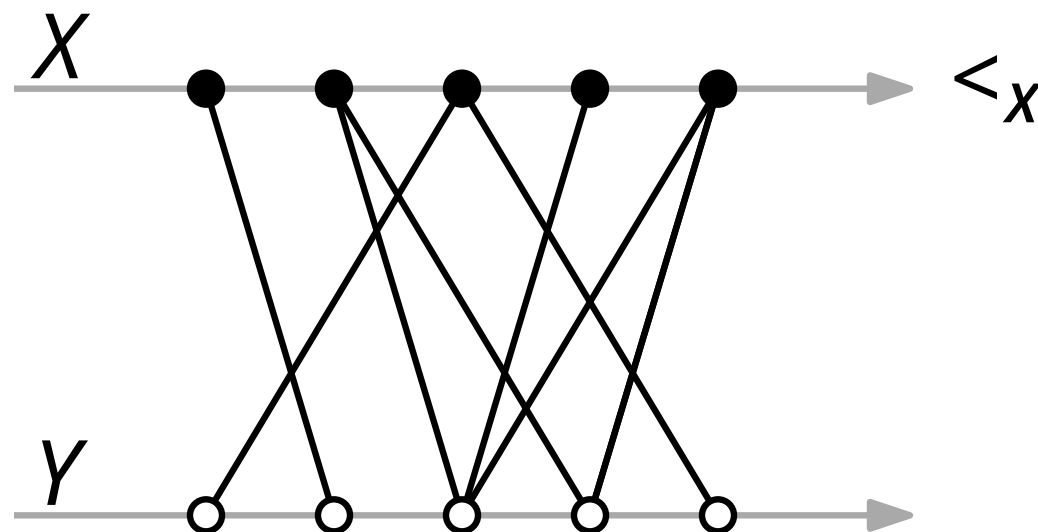


本研究では，以下の「 k -平面性判定版（後述）」を考える．

- 片面 k -平面性判定問題
- 両面 k -平面性判定問題
- 外 k -平面性判定問題

これらの問題に対し， k をパラメータとしたときのアルゴリズムや困難性を示す．

背景: 2層描画における交差数最小化問題



片面交差数最小化問題

入力: 二部グラフ $G = (X \cup Y, E)$, 整数 k , X の線形順序 $<_X$

質問: Y を並び替えて, 交差数を k 以下に出来るか?

両面交差数最小化問題

入力: 二部グラフ $G = (X \cup Y, E)$, 整数 k

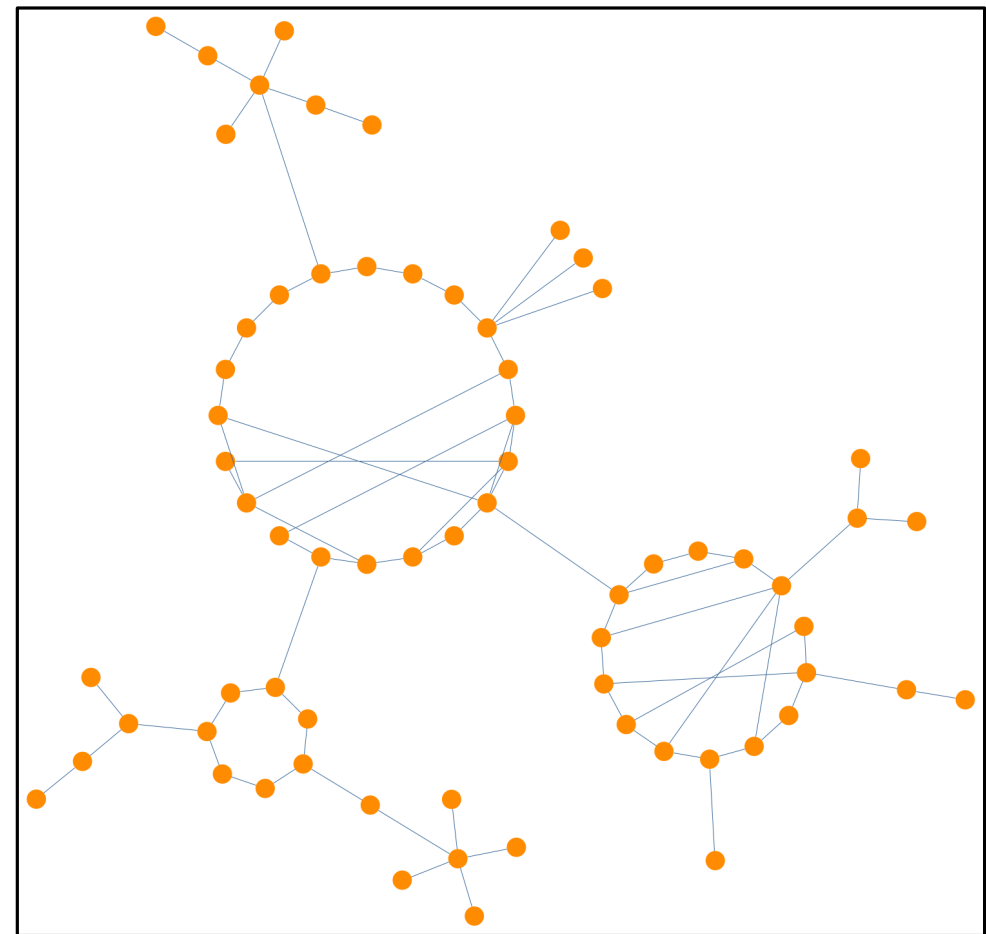
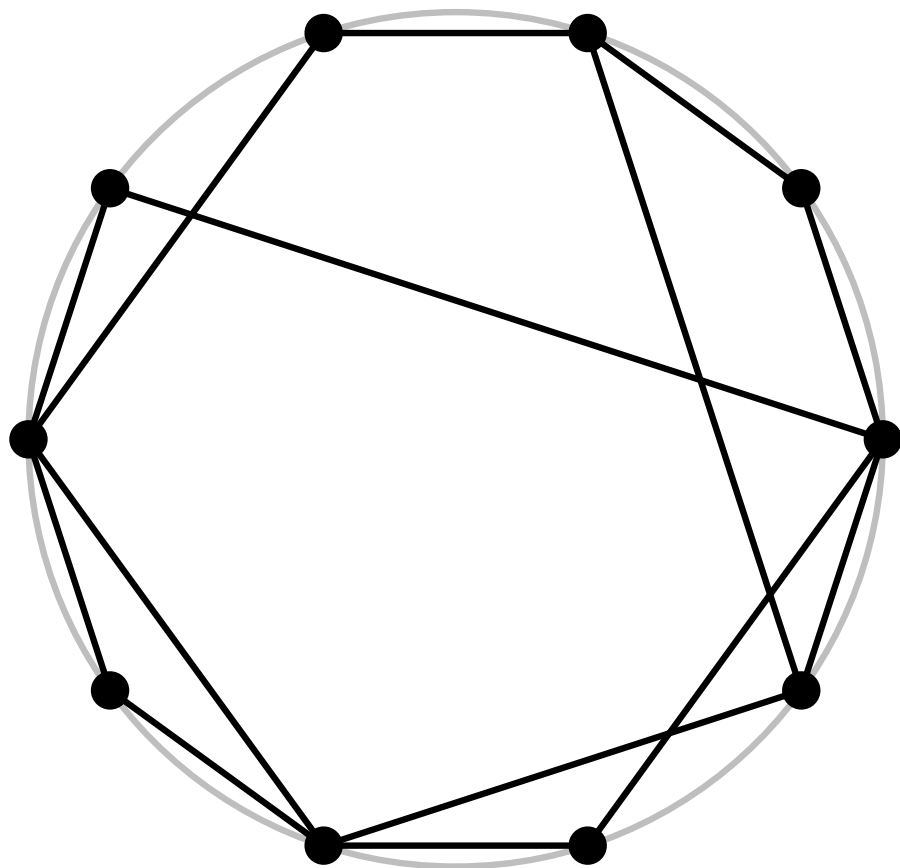
質問: X, Y を並び替えて, 交差数を k 以下に出来るか?

背景: 円形描画における交差数最小化問題

円形 (外平面) 交差数最小化問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 整数 k

質問: V を並び替えて, 交差数を k 以下に出来るか?



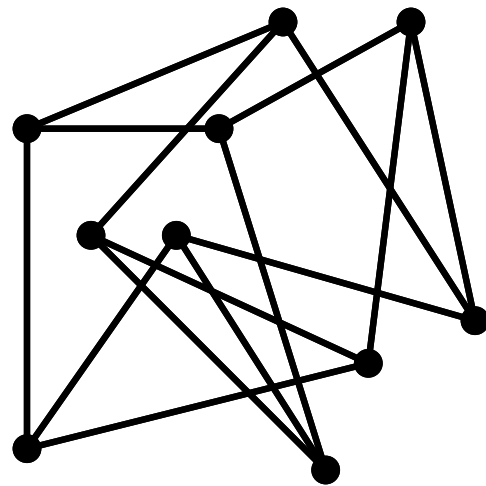
ソフトウェアでの応用^[1]

[1] <https://www.yworks.com/pages/circular-graph-layout>

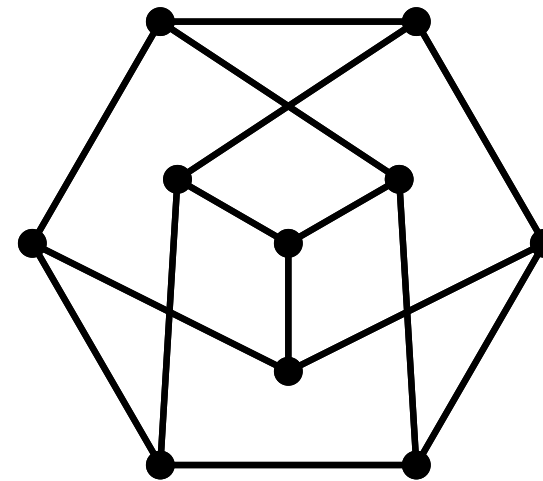
二つの「見やすさ」の指標: 交差数と k -平面性

交差数

全体の交差の数が少なければ，見やすい．



交差数 12
3-平面描画



交差数 3
1-平面描画

k -平面性

各边上の交差の数の**最大値**が少なければ，見やすい．

各边上の交差が高々 k 個である描画を， **k -平面描画**と呼ぶ．

本研究で扱う問題

片面 k -平面性判定問題

入力: 二部グラフ $G = (X \cup Y, E)$, 整数 k , X の線形順序 $<_X$

質問: Y を並び替えて, k -平面描画に出来るか?

両面 k -平面性判定問題

入力: 二部グラフ $G = (X \cup Y, E)$, 整数 k

質問: X, Y を並び替えて, k -平面描画に出来るか?

外 k -平面性判定問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 整数 k

質問: V を並び替えて, k -平面描画に出来るか?

先行研究と本研究の結果

	片面	両面	円形 / 外平面
交差数最小化	交差数で FPT / NP 完全		
0-平面性判定	線形時間	線形 (キャタピラ)	線形 (外平面的グラフ)
k-平面性判定 (先行研究)	不明	不明	[GD 2013] $k = 1$: 線形時間 [GD 2017] k 定数: 準多項式時間
k-平面性判定 (本研究)	FPT $2^{O(k \log k)} n^c$	- XP $2^{O(k^3)} n^{2k+c}$ - XNLP 完全	- XP $2^{O(k \log k)} n^{3k+c}$ - XNLP 困難

注: $FPT \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq \dots \subseteq XNLP \subseteq XP$
 $O(f(k) \cdot n^c)$ $O(f(k) \cdot n^{g(k)})$

バンド幅問題との関係

両面 k -平面性・外 k -平面性の結果は、バンド幅問題がベース。
(次ページ)

計算困難性

バンド幅問題 の XNLP 困難性

帰着

- 両面 k -平面性判定
- 外 k -平面性判定

アルゴリズム

[Saxe, 1980]

バンド幅問題に対する XP アルゴリズム

同様の手法

- 両面 k -平面性判定の XP

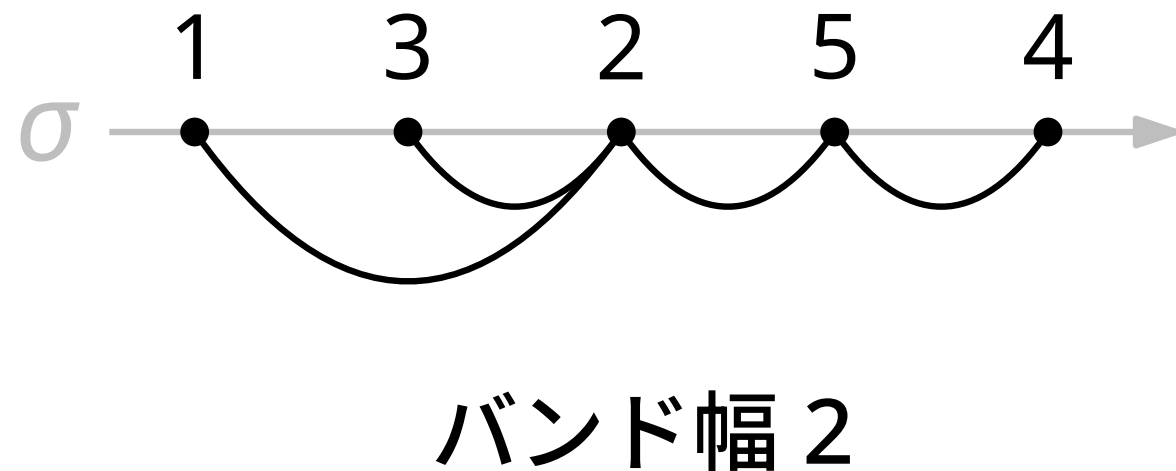
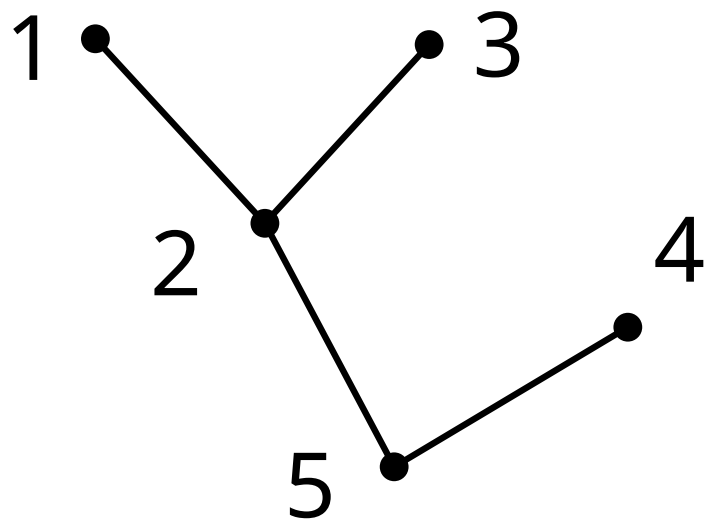
発展

- 外 k -平面性判定の XP

バンド幅問題とは

バンド幅

グラフ $G = (V, E)$ と V の順列 $\sigma: V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ に対して、
順列 σ の**バンド幅**は $\max_{\{u,v\} \in E} |\sigma(u) - \sigma(v)|$ で定義される。



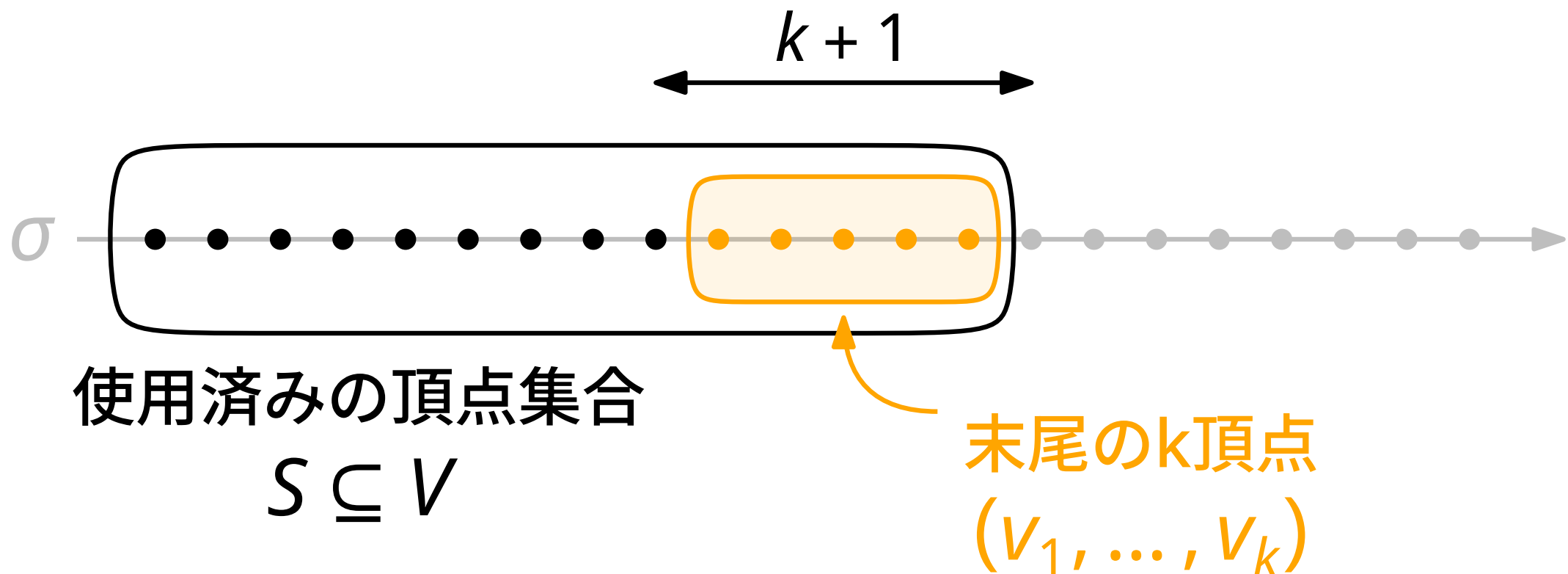
バンド幅問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 整数 k

質問: V の順列 σ で、バンド幅高々 k のものが存在するか？

バンド幅問題に対する Held-Karp 型動的計画法

[Saxe, 1980] による XP は，シンプルな動的計画法がベース．
先頭から順列 σ の構築を試みる．



この動的計画法で $O(2^n k! n^{k+1})$ 時間で解ける．

バンド幅問題に対する XP アルゴリズム

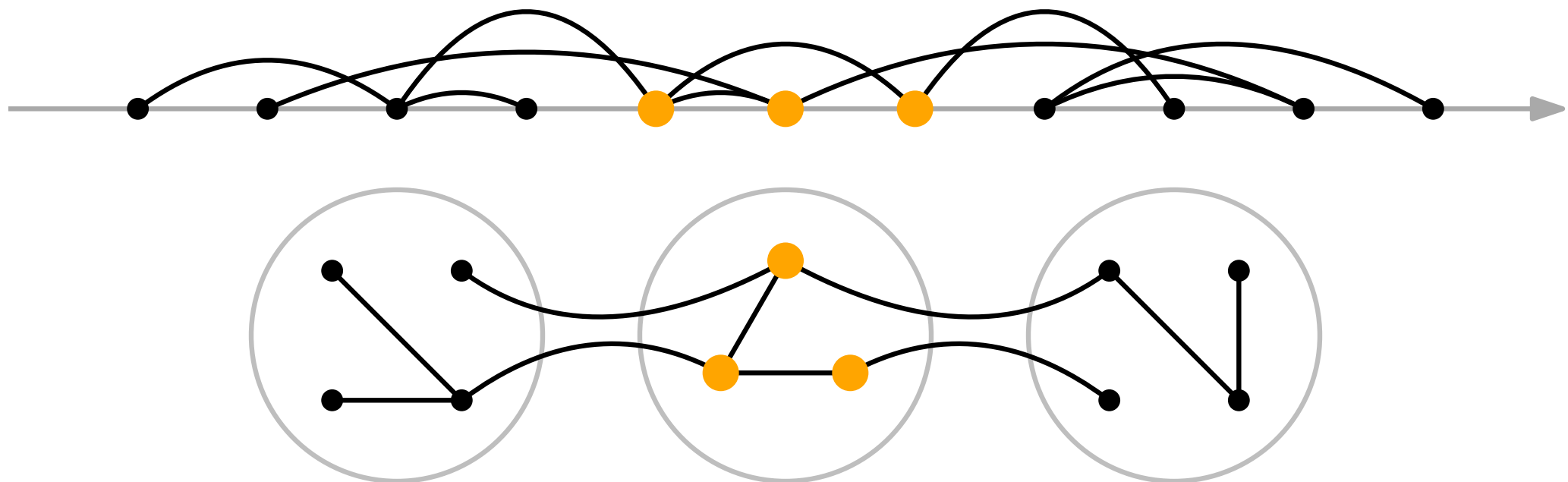
[Saxe, 1980] のアイデア

実は、各 $(v_1, \dots, v_k)$ に対し 2^{2k^2} 個の S のみ考えればよい。

→ $O(2^n k! n^{k+1})$ 時間から $O(2^{2k^2} (k)! n^{k+1})$ 時間になり XP.

観察①

バンド幅高々 k の順列上で連続する k 頂点について、
「左側の頂点集合」と「右側の頂点集合」の間に辺は無い。

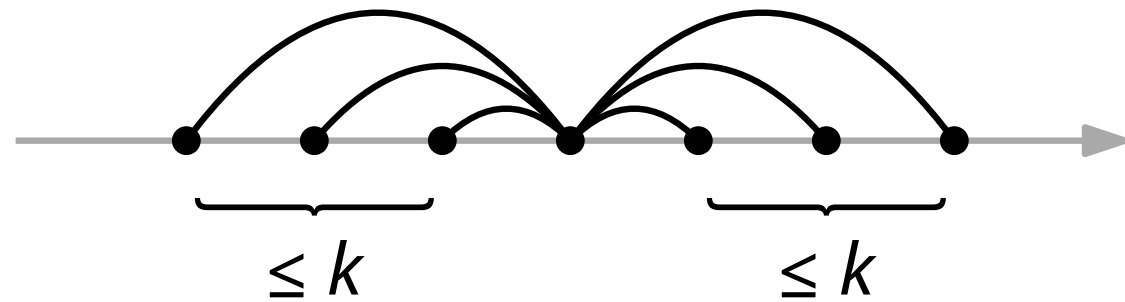


バンド幅問題に対する XP アルゴリズム

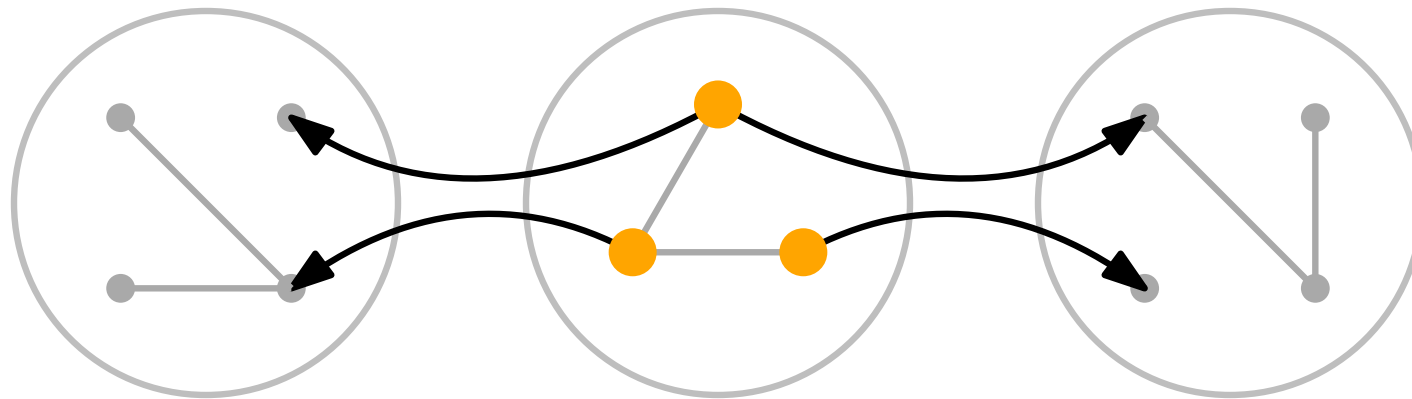
観察②

入力のグラフに対して，以下を仮定できる．

- 連結
- 最大次数が高々 $2k$



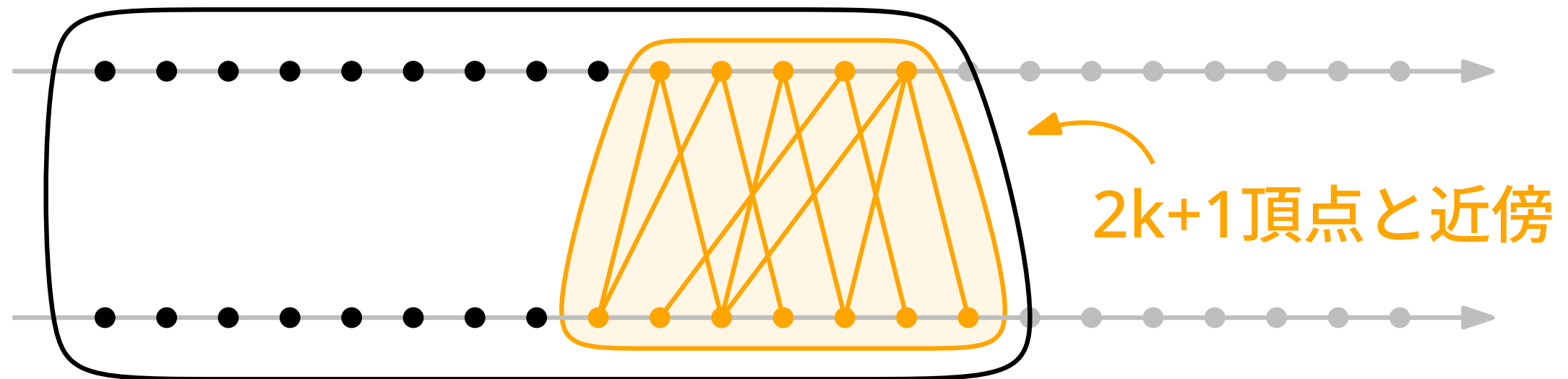
最大次数より， k 頂点から左右へ向かう辺の数は $2k^2$ 本．



連結性より， k 頂点を削除したとき連結成分は高々 $2k^2$ 個．
各連結成分が左右どちらにあるか $\rightarrow$ 考慮すべき S は 2^{2k^2} 個．

両面 k-平面性に対する XP アルゴリズムのアイデア

両面 k-平面性判定問題も，同様の構造を持っている．



$2^n f(k) \cdot n^{2k+c}$ 時間の同様の動的計画法が設計可能．

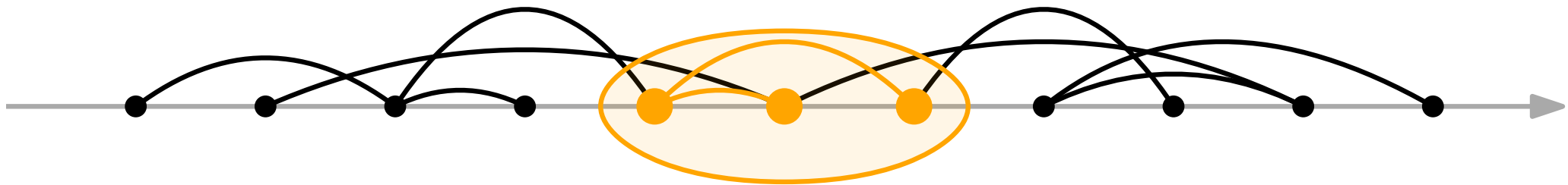
- 連結
 - 最大次数が高々 $2k + 2$
- を前処理で仮定．

$2^{O(k^3)} \cdot n^{2k+c}$ 時間の XP アルゴリズム．

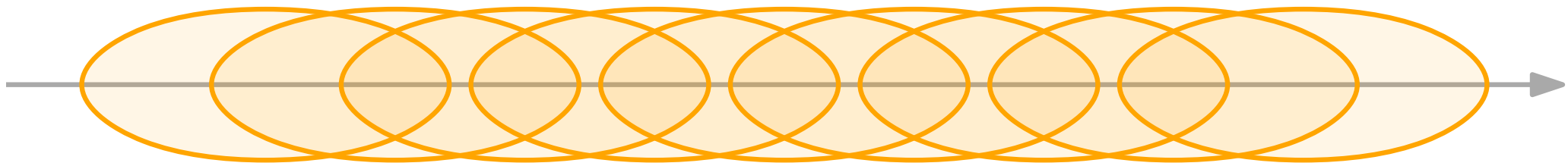
これまでの XP アルゴリズムのハイレベルアイデア

バンド幅・両面 k -平面性の嬉しい構造

解を仮定したとき、「解を分割する $f(k)$ サイズの構造」がある。
さらに、その構造から解の分割方法が高々 $g(k)$ 通りに定まる。



そして、その「 $f(k)$ サイズの構造」がパス状に広がっている。
これを追って、表サイズ $g(k)n^{f(k)}$ の動的計画法を設計した。



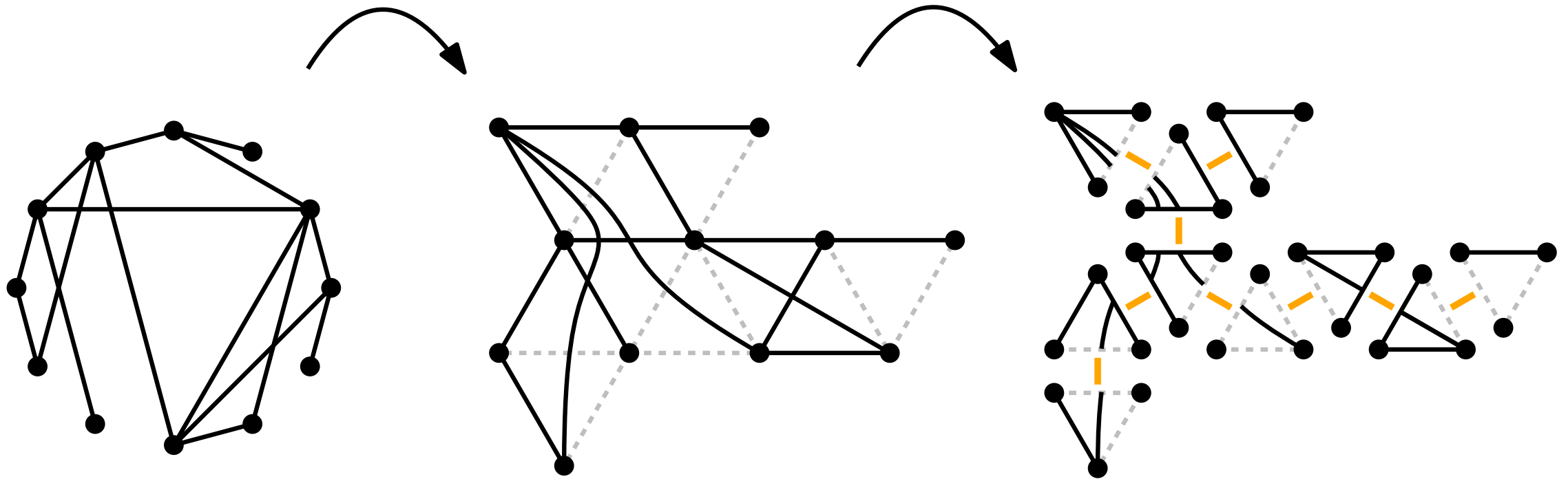
しかし、外 k -平面性は円形の描画でパス的構造を持たない。

外 k -平面性に対する XP アルゴリズムのアイデア

以下の雰囲気の定理が成り立つ．

[Firman, Gutowski, Kryven, **Okada**, Wolff, 2024]

- 任意の外 k -平面描画を，
 $f(k)$ サイズの描画のパーツからなる木に分解できる．



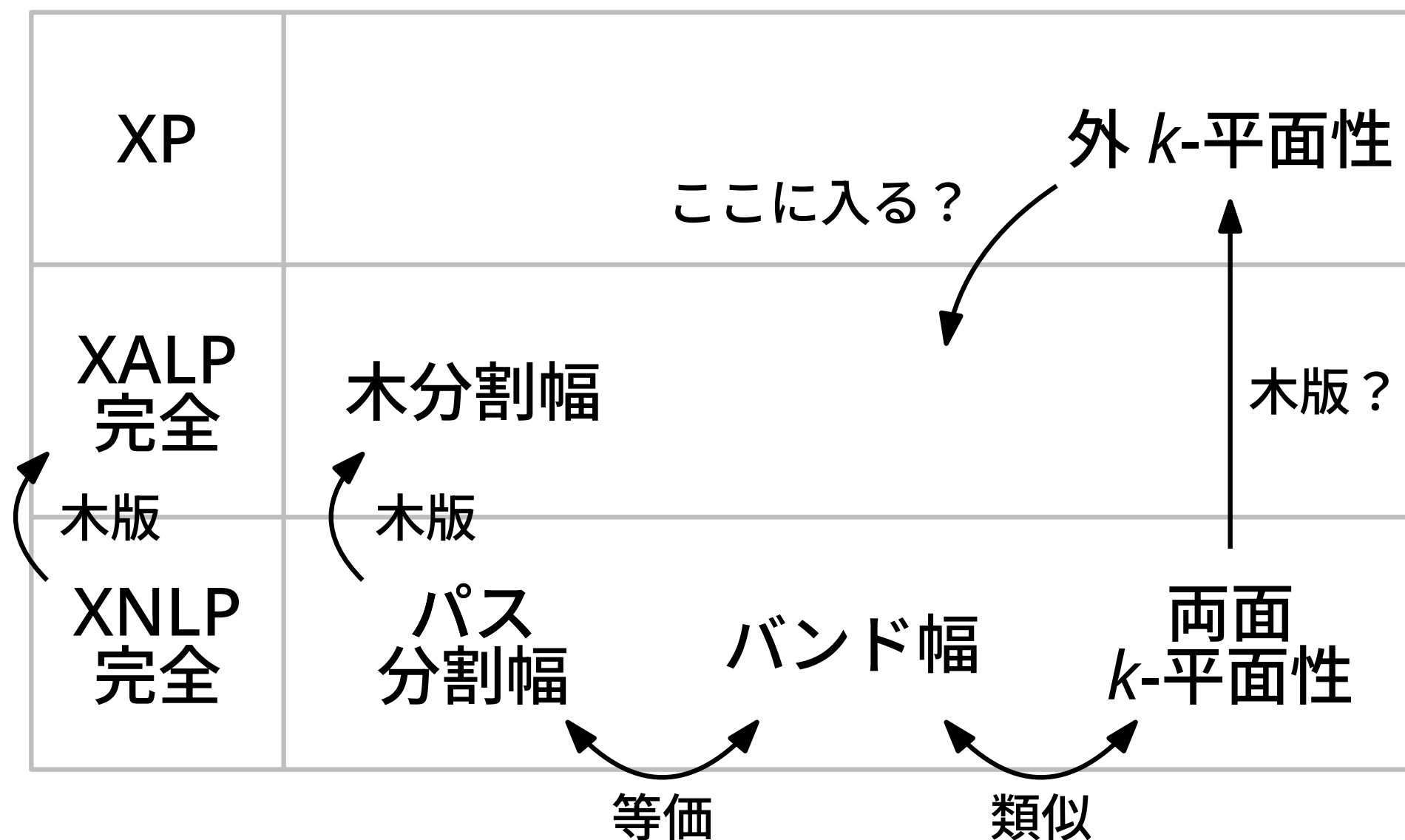
この解の木構造の上で同様の動的計画法ができ，XP を示した．

まとめと今後の展望

	片面	両面	円形 / 外平面
交差数最小化	交差数で FPT / NP 完全		
0-平面性判定	線形時間	線形 (キャタピラ)	線形 (外平面的グラフ)
k -平面性判定 (先行研究)	不明	不明	[GD 2013] $k = 1$: 線形時間 [GD 2017] k 固定: 準多項式時間
k -平面性判定 (本研究)	• FPT $2^{O(k \log k)} n^c$	• XP $2^{O(k^3)} n^{2k+c}$ • XNLP 完全	• XP $2^{O(k \log k)} n^{3k+c}$ • XNLP 困難

- 片面 k -平面性の NP 完全性
- 外 k -平面性の XALP 完全性
- 2層から ℓ 層描画への拡張

付録: 外 k -平面性の計算量の予想



注: $\text{FPT} \subseteq \text{W}[1] \subseteq \text{W}[2] \subseteq \dots \subseteq \text{XNLP} \subseteq \text{XALP} \subseteq \text{XP}$

付録: XNLP の定義

XNLP

計算量クラス XNLP は、パラメータ化問題のうち、入力長を n 、パラメータを k として、ある計算可能関数 f が存在してその問題を $f(k) n^{O(1)}$ 時間かつ $f(k) \log n$ 空間で解く非決定性アルゴリズムが存在するものすべてからなる。