2層 k-平面性と外 k-平面性判定のパラメータ化計算量

Yasuaki Kobayashi
(Hokkaido University)

Yuto Okada
(Nagoya University)

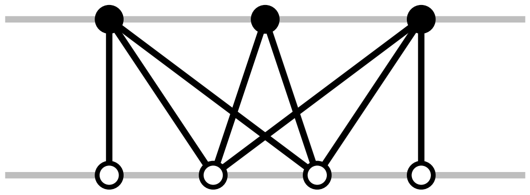
Alexander Wolff
(Universität Würzburg)

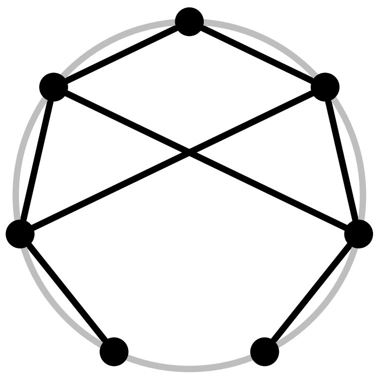
2025-01-27 @ 冬の LA シンポジウム

本研究の概要

グラフ描画分野では，これらの問題がよく研究されている．

- 片面交差数最小化問題
- 両面交差数最小化問題
- 円形交差数最小化問題



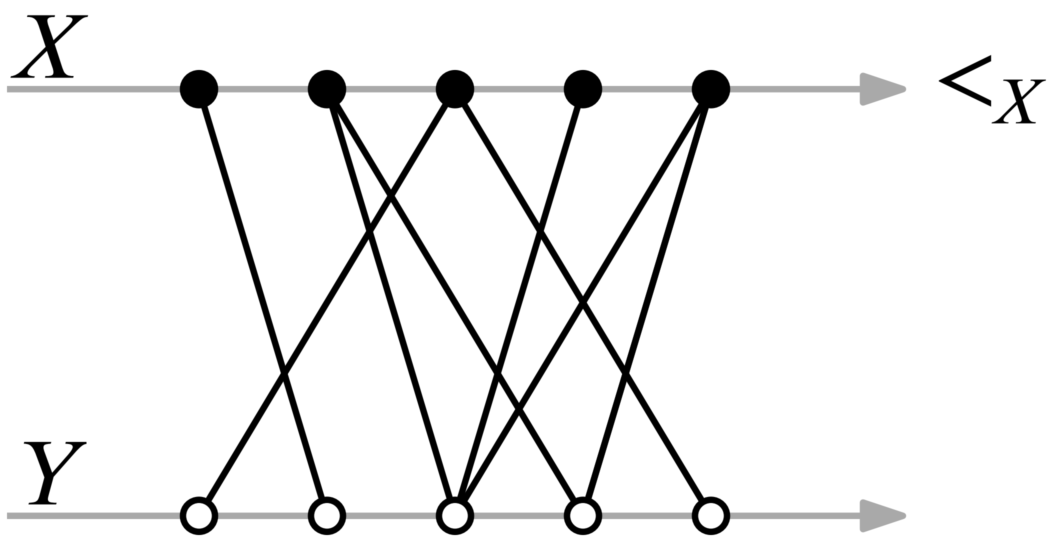


本研究では，以下の「k-平面性判定版（後述）」を考える．

- 片面 k-平面性判定問題
- 両面 k-平面性判定問題
- 外 k-平面性判定問題

これらの問題に対し，
k をパラメータとしたときのアルゴリズムや困難性を示す．

背景: 2 層描画における交差数最小化問題



片面交差数最小化問題

入力: 二部グラフ $G = (X \cup Y, E)$，整数 k，X の線形順序 $<_X$

質問: Y を並び替えて，交差数を k 以下に出来るか？

両面交差数最小化問題

入力: 二部グラフ $G = (X \cup Y, E)$，整数 k

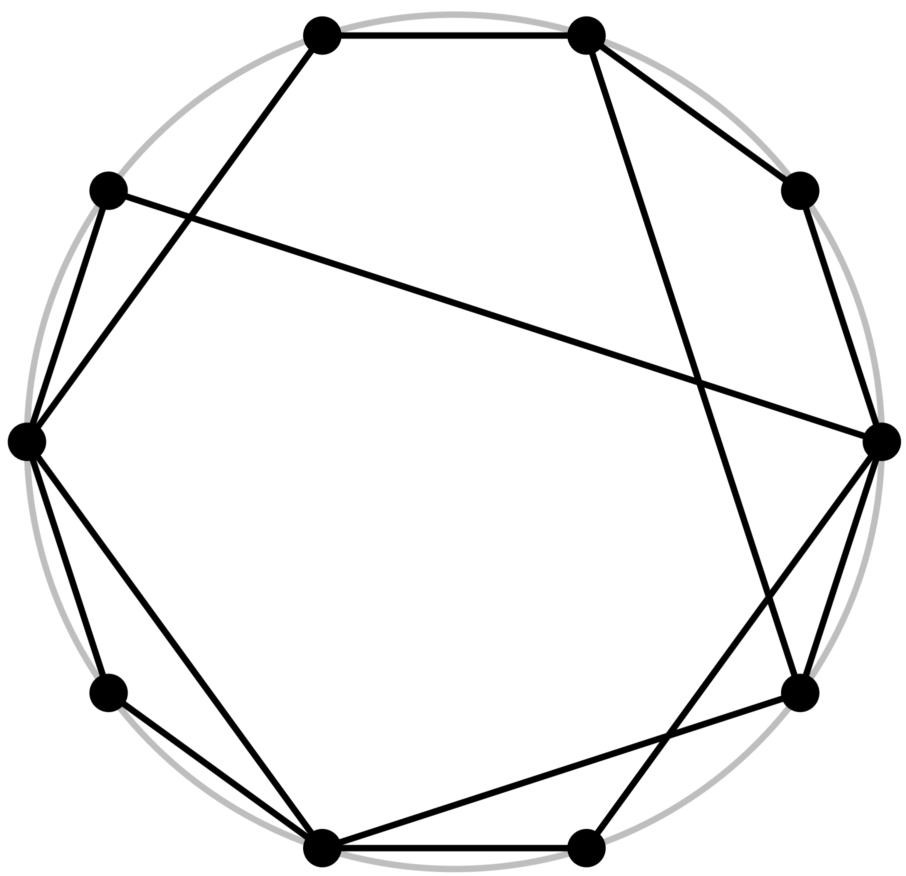
質問: X, Y を並び替えて，交差数を k 以下に出来るか？

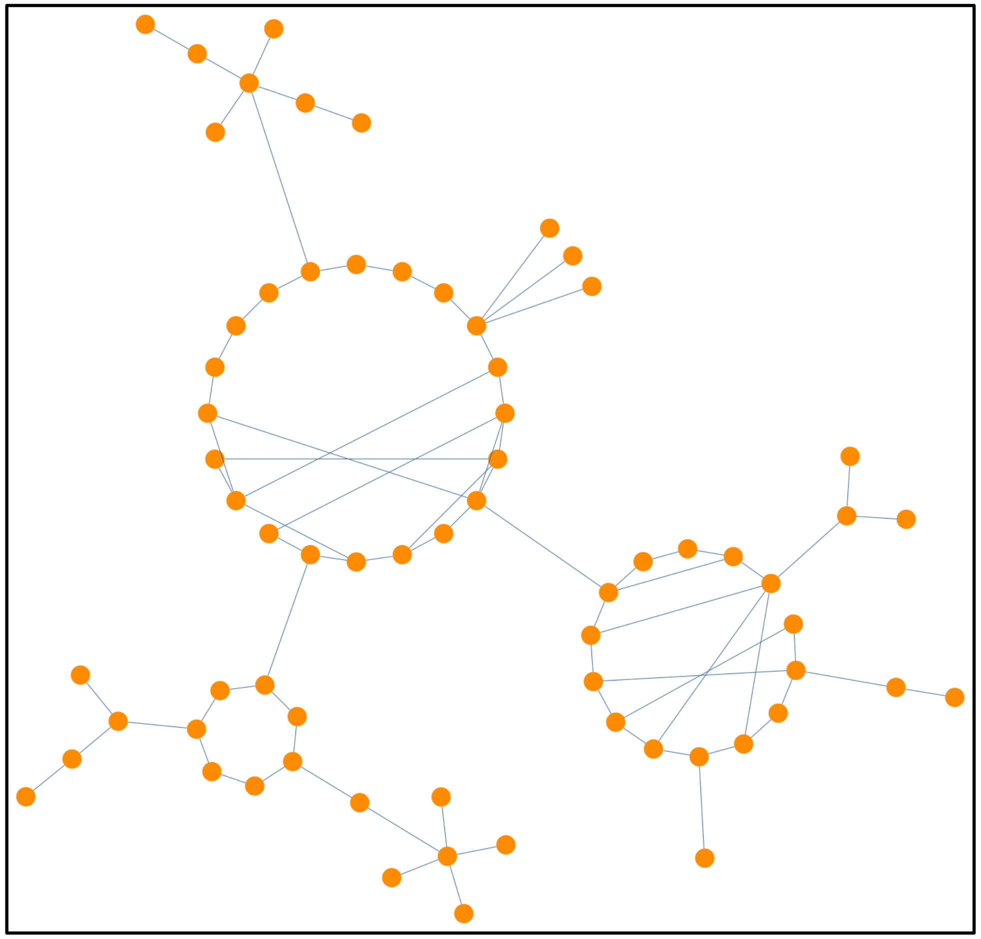
背景: 円形描画における交差数最小化問題

円形（外平面）交差数最小化問題

入力: グラフ $G = (V, E)$，整数 k

質問: V を並び替えて，交差数を k 以下に出来るか？





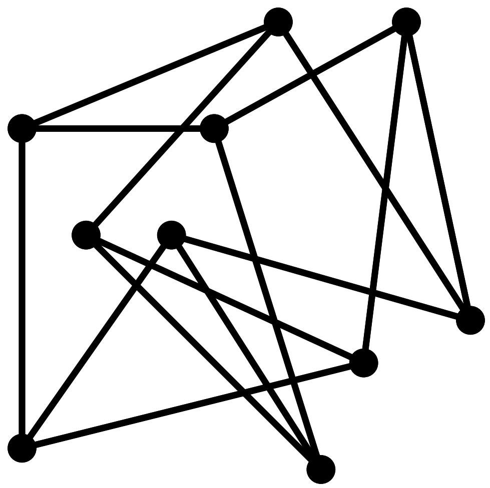
ソフトウェアでの応用[1]

[1] https://www.yworks.com/pages/circular-graph-layout

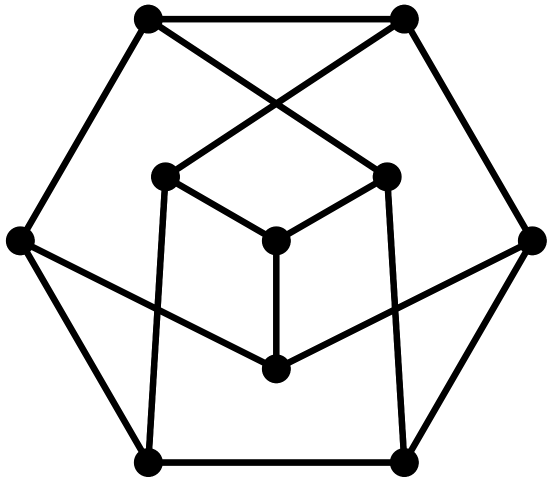
二つの「見やすさ」の指標: 交差数と k-平面性

交差数

全体の交差の数が少なければ，見やすい．



交差数 12
3-平面描画



交差数 3
1-平面描画

k-平面性

各辺上の交差の数の最大値が少なければ，見やすい．
各辺上の交差が高々 k 個である描画を，k-平面描画と呼ぶ．

本研究で扱う問題

片面 k-平面性判定問題

入力: 二部グラフ $G=(X\cup Y,E)$，整数 k，X の線形順序 $<_X$

質問: Y を並び替えて，k-平面描画に出来るか？

両面 k-平面性判定問題

入力: 二部グラフ $G=(X\cup Y,E)$，整数 k

質問: X,Y を並び替えて，k-平面描画に出来るか？

外 k-平面性判定問題

入力: グラフ $G=(V,E)$，整数 k

質問: V を並び替えて，k-平面描画に出来るか？

先行研究と本研究の結果

	片面	両面	円形 / 外平面
交差数最小化	交差数で FPT / NP 完全		
0-平面性判定	線形時間	線形 (キャタピラ)	線形 (外平面的グラフ)
k-平面性判定 (先行研究)	不明	不明	[GD 2013] $k=1$: 線形時間 [GD 2017] k 定数: 準多項式時間
k-平面性判定 (本研究)	• FPT $2^{O(k \log k)} n^c$	• XP $2^{O(k^3)} n^{2k+c}$ • XNLP 完全	• XP $2^{O(k \log k)} n^{3k+c}$ • XNLP 困難

注: FPT $\subseteq$ W[1] $\subseteq$ W[2] $\subseteq \cdots \subseteq$ XNLP $\subseteq$ XP

$O(f(k) \cdot n^c)$ $O(f(k) \cdot n^{g(k)})$

バンド幅問題との関係

両面 k-平面性・外 k-平面性の結果は，バンド幅問題がベース．
（次ページ）

計算困難性

バンド幅問題
の XNLP 困難性

帰着

- 両面 k-平面性判定
- 外 k-平面性判定

アルゴリズム

[Saxe, 1980]
バンド幅問題に対する
XP アルゴリズム

同様の手法

- 両面 k-平面性判定の XP

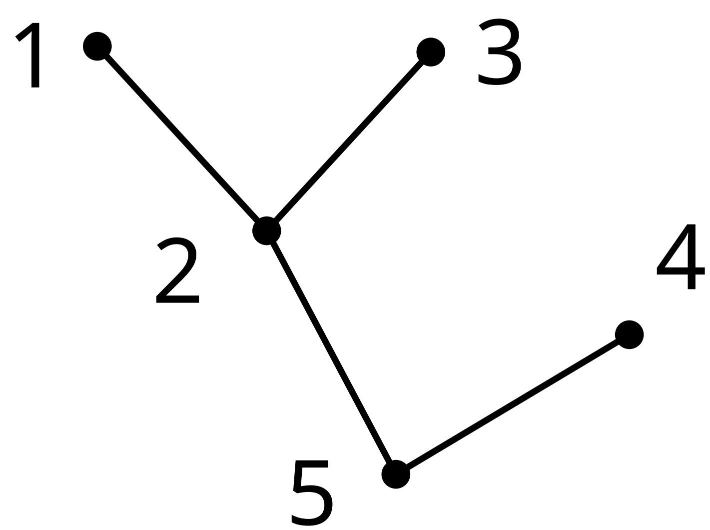
発展

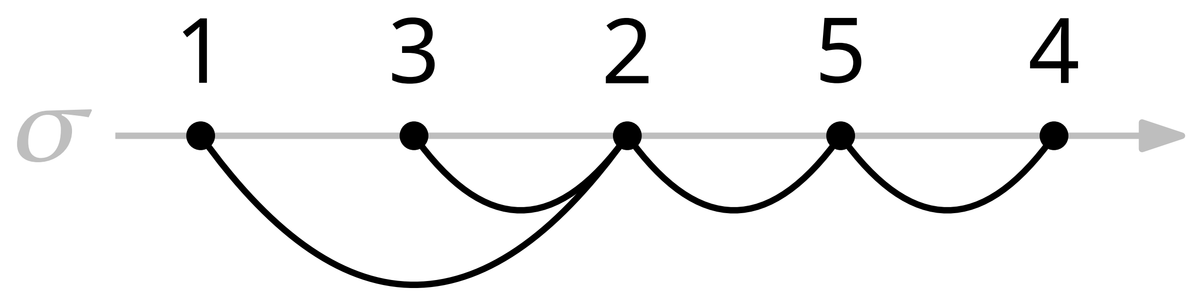
- 外 k-平面性判定の XP

バンド幅問題とは

バンド幅

グラフ $G = (V, E)$ と V の順列 $\sigma : V \to \{1, \ldots, n\}$ に対して，
順列 σ のバンド幅は $\max_{\{u,v\} \in E} |\sigma(u) - \sigma(v)|$ で定義される．





バンド幅 2

バンド幅問題

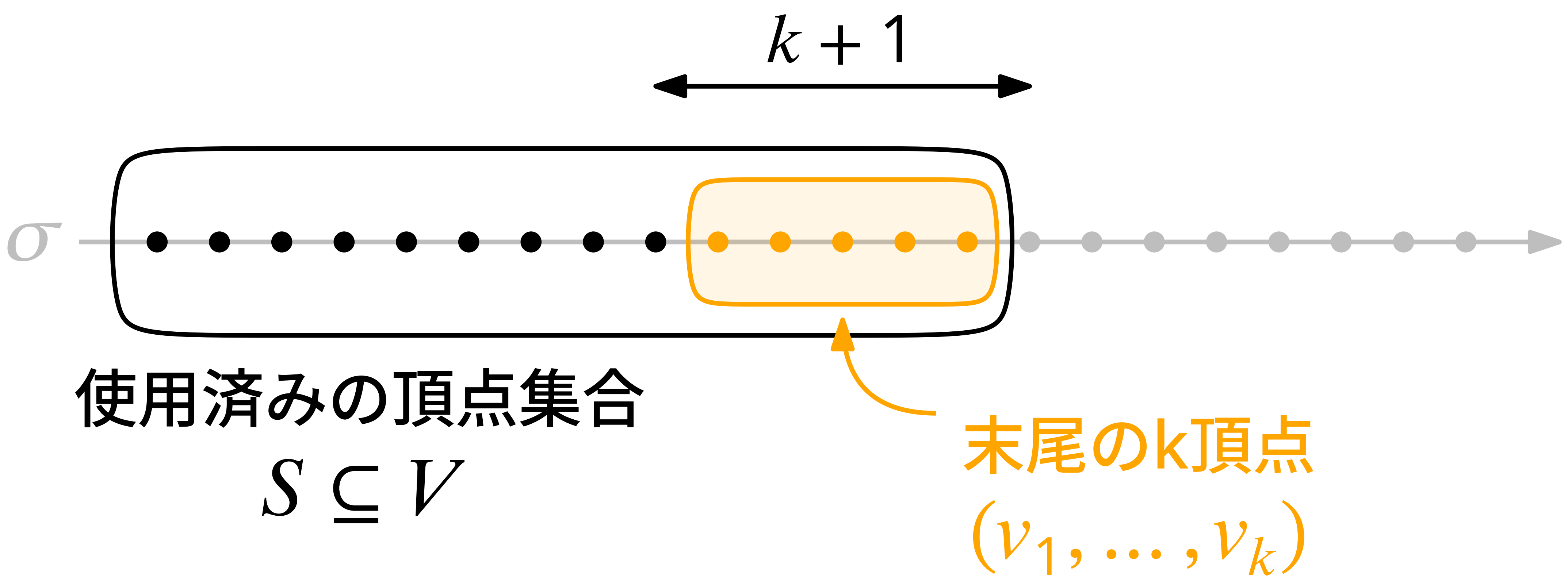
入力: グラフ $G = (V, E)$，整数 k

質問: V の順列 σ で，バンド幅高々 k のものが存在するか？

バンド幅問題に対する Held–Karp 型動的計画法

[Saxe, 1980] による XP は，シンプルな動的計画法がベース．

先頭から順列 σ の構築を試みる．



この動的計画法で $O(2^n k! n^{k+1})$ 時間で解ける．

バンド幅問題に対する XP アルゴリズム

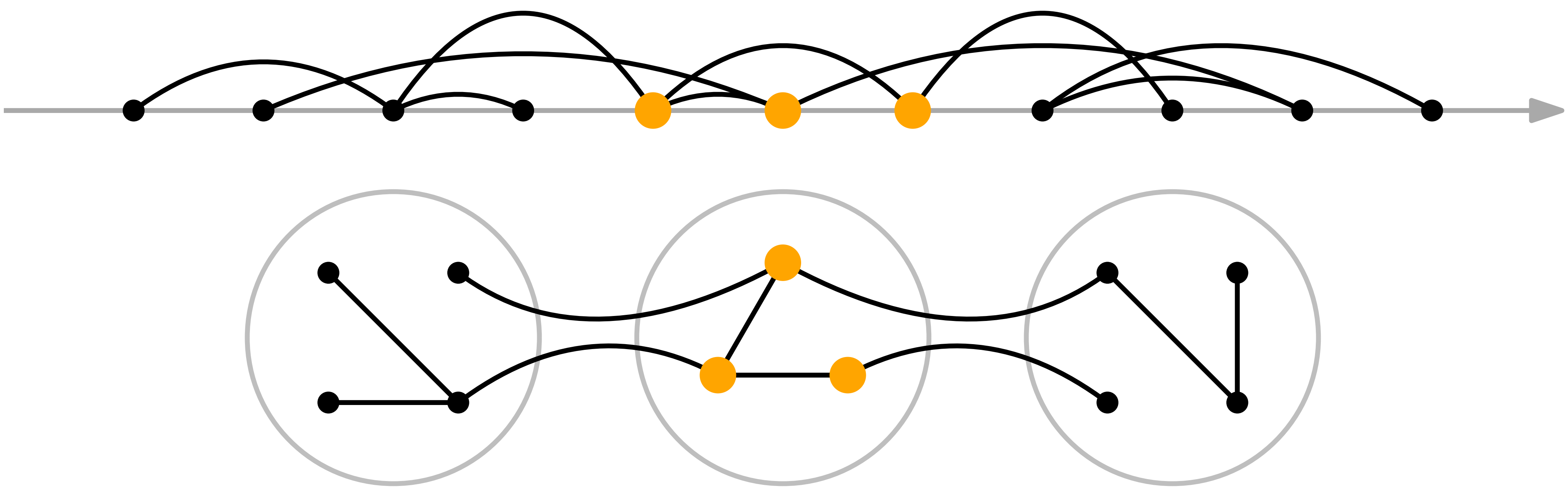
[Saxe, 1980] のアイデア

実は，各 $(v_1, \ldots, v_k)$ に対し 2^{2k^2} 個の S のみ考えればよい．

$\to O(2^n k! n^{k+1})$ 時間から $O(2^{2k^2}(k)! n^{k+1})$ 時間になり XP．

観察①

バンド幅高々 k の順列上で連続する k 頂点について，
「左側の頂点集合」と「右側の頂点集合」の間に辺は無い．

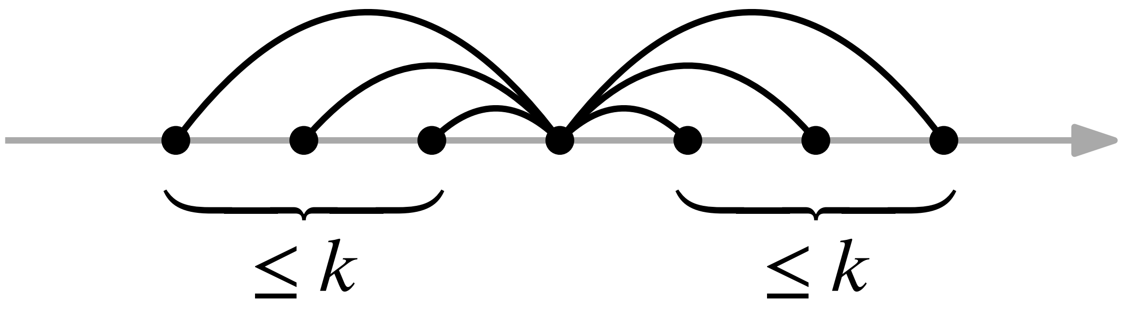


バンド幅問題に対する XP アルゴリズム

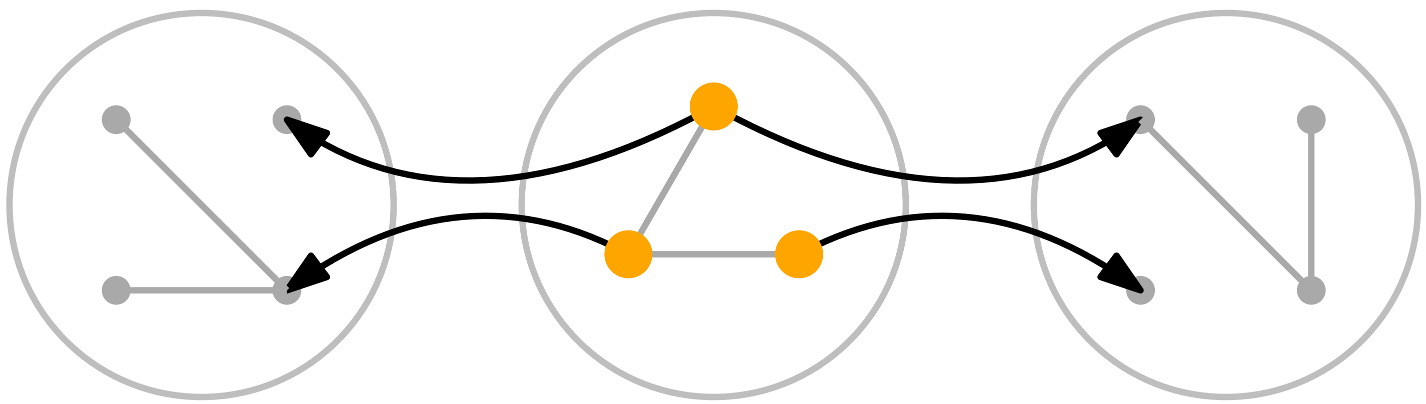
観察②

入力のグラフに対して，以下を仮定できる．

- 連結
- 最大次数が高々 $2k$



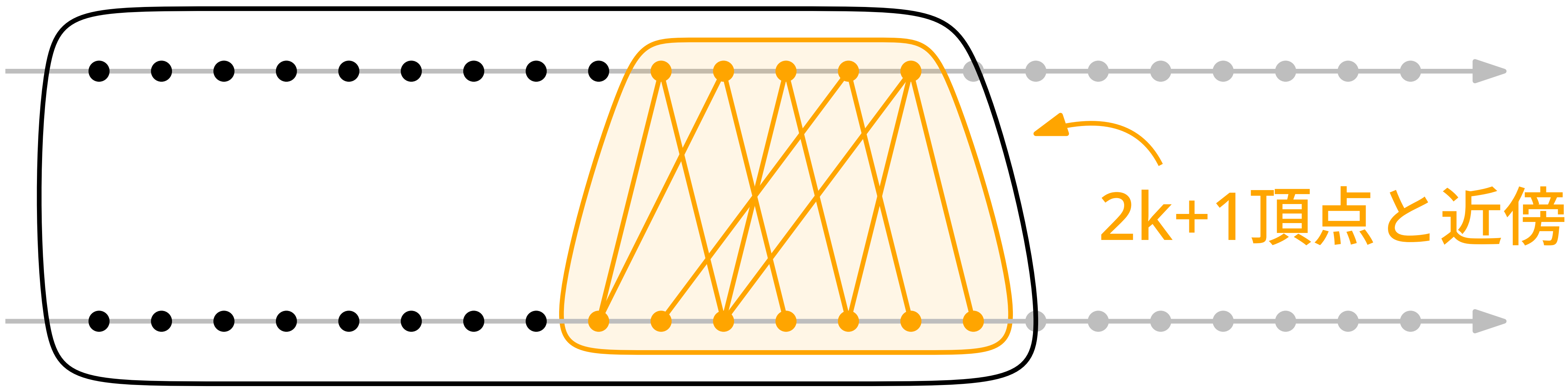
最大次数より，k 頂点から左右へ向かう辺の数は $2k^2$ 本．



連結性より，**「それらの辺が左右どちらへ行くか」**の情報から左右の頂点集合が復元可能．→ 考慮すべき S は 2^{2k^2} 個．

両面 k-平面性に対する XP アルゴリズムのアイデア

両面 k-平面性判定問題も，同様の構造を持っている．



$2^n f(k) \cdot n^{2k+c}$ 時間の同様の動的計画法が設計可能

- 連結
- 最大次数が高々 $2k+2$

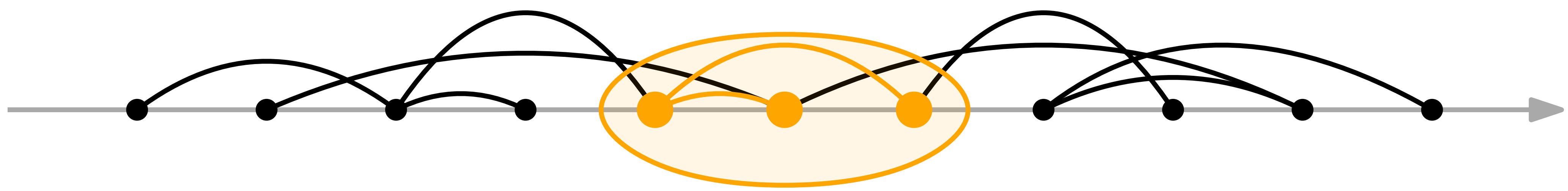
を前処理で仮定．

$2^{O(k^3)} \cdot n^{2k+c}$ 時間の XP アルゴリズム．

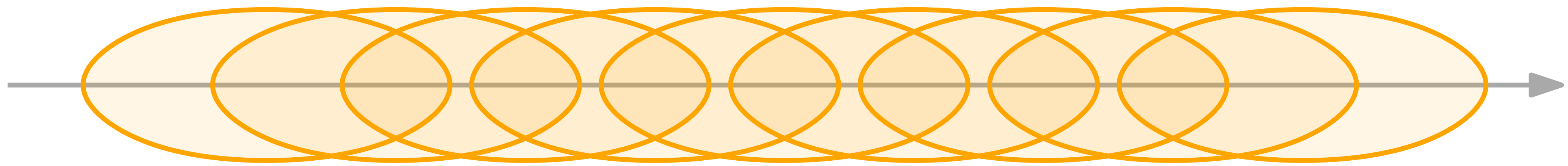
これまでの XP アルゴリズムのハイレベルアイデア

バンド幅・両面 k-平面性の嬉しい構造

解を仮定したとき，「解を分割する $f(k)$ サイズの構造」がある．
さらに，その構造から解の分割方法が高々 $g(k)$ 通りに定まる．



そして，その「$f(k)$ サイズの構造」がパス状に広がっている．
これを追って，表サイズ $g(k)n^{f(k)}$ の動的計画法を設計した．



しかし，外 k-平面性は円形の描画でパス的構造を持たない．

外 k-平面性に対する XP アルゴリズムのアイデア

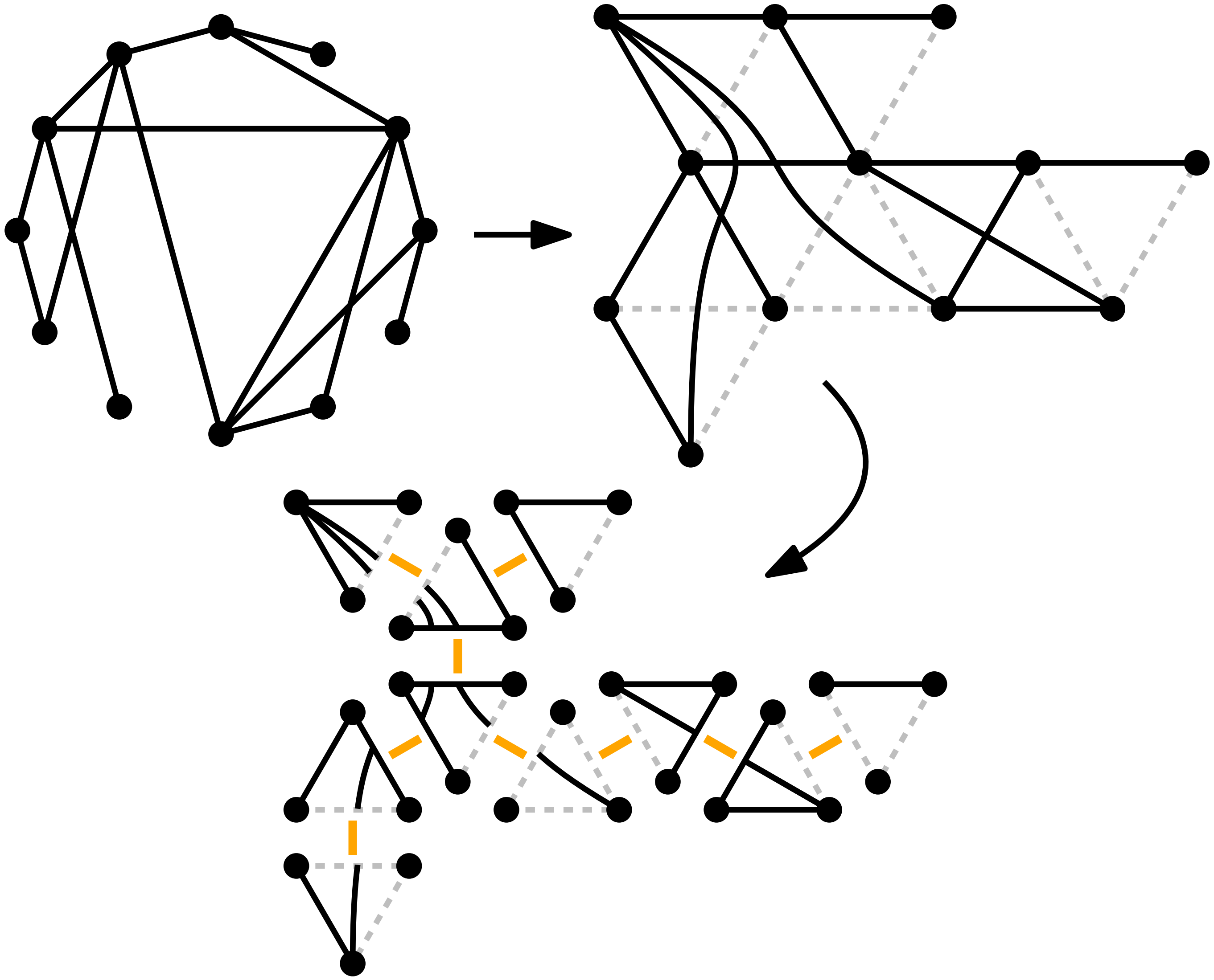
夏の LA シンポジウムで，以下の雰囲気の定理を示した．

- 任意の外 k-平面描画を，$f(k)$ サイズの描画のパーツの木に分解できる．

外 k-平面的グラフの三角形分割

Oksana Firman (Universität Würzburg)
Grzegorz Gutowski (Jagiellonian University)
Myroslav Kryven (University of Manitoba)
Yuto Okada (Nagoya University)
Alexander Wolff (Universität Würzburg)

2024-07-16 @ 夏の LA シンポジウム



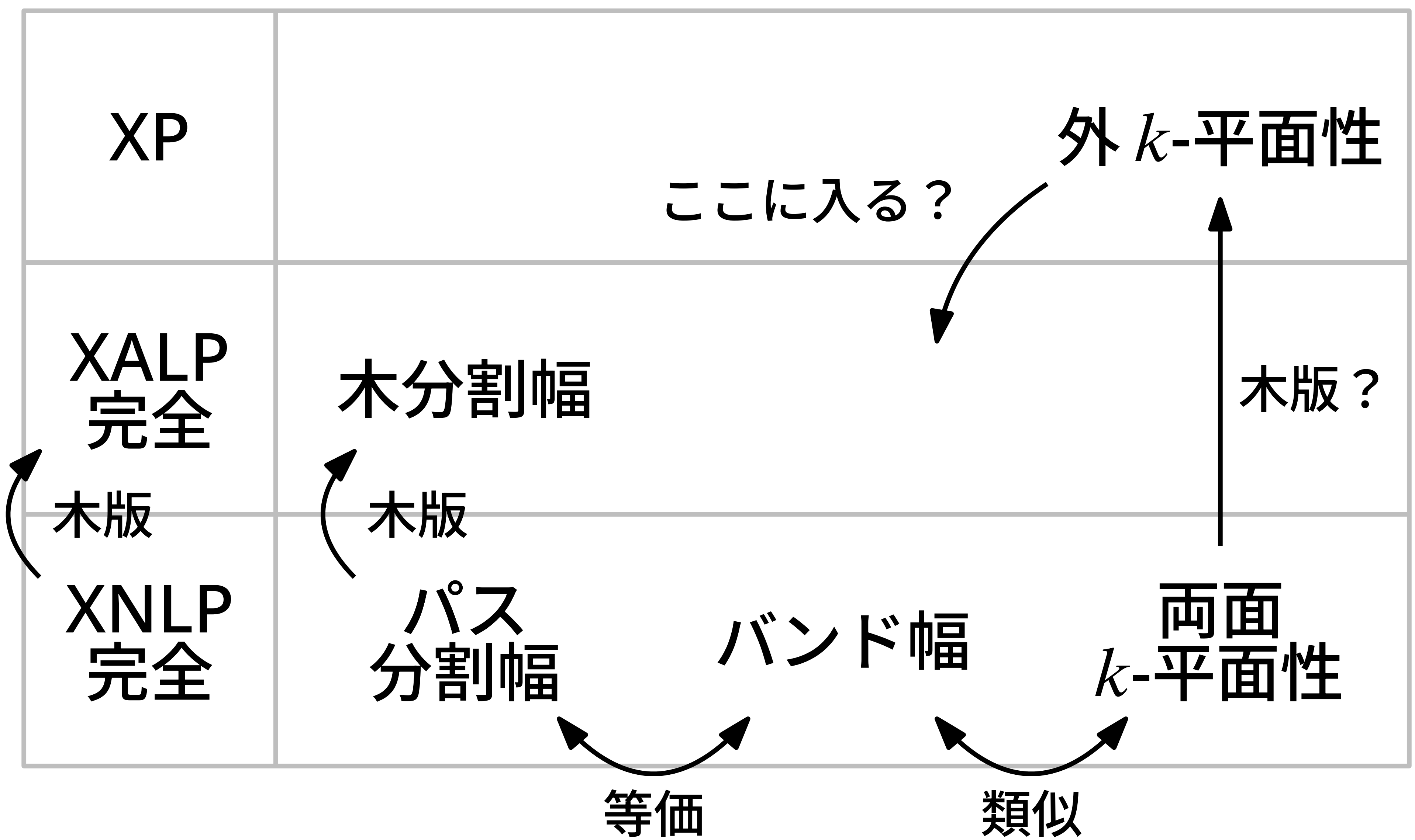
この解の木構造の上で同様の動的計画法ができ，XP を示した．

まとめと今後の展望

	片面	両面	円形 / 外平面
交差数最小化	交差数で FPT / NP 完全		
0-平面性判定	線形時間	線形 (キャタピラ)	線形 (外平面的グラフ)
k-平面性判定（先行研究）	不明	不明	[GD 2013] $k=1$: 線形時間 [GD 2017] k 固定: 準多項式時間
k-平面性判定（本研究）	• FPT $2^{O(k \log k)} n^c$	• XP $2^{O(k^3)} n^{2k+c}$ • XNLP 完全	• XP $2^{O(k \log k)} n^{3k+c}$ • XNLP 困難

- 片面 k-平面性の NP 完全性
- 2層から ℓ 層描画への拡張
- 外 k-平面性の XALP 完全性

付録: 外 k-平面性の計算量の予想



注: $\mathrm{FPT} \subseteq \mathrm{W}[1] \subseteq \mathrm{W}[2] \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{XNLP} \subseteq \mathrm{XALP} \subseteq \mathrm{XP}$

付録: XNLP の定義

XNLP

計算量クラス **XNLP** は，パラメータ化問題のうち，入力長を n，パラメータを k として，ある計算可能関数 f が存在してその問題を $f(k)n^{O(1)}$ 時間かつ $f(k)\log n$ 空間で解く非決定性アルゴリズムが存在するものすべてからなる．