外 k-平面的グラフの三角形分割

Oksana Firman
(Universität Würzburg)

Grzegorz Gutowski
(Jagiellonian University)

Myroslav Kryven
(University of Manitoba)

Yuto Okada
(Nagoya University)

Alexander Wolff
(Universität Würzburg)

2024-07-16 @ 夏の LA シンポジウム

概要

グラフ描画に外 k-平面的グラフというグラフクラスがある．
外 k-平面的グラフの以下のパラメータの上界を改善した．

- 木幅: $3k + 11 \to 1.5k + 2$，
- separation number: $2k + 3 \to k + 2$（タイト）．

上記の結果より，その改善のために示した
外 k-平面的グラフの三角形分割の概念が本質的かつ興味深い．
これをメインに話す．

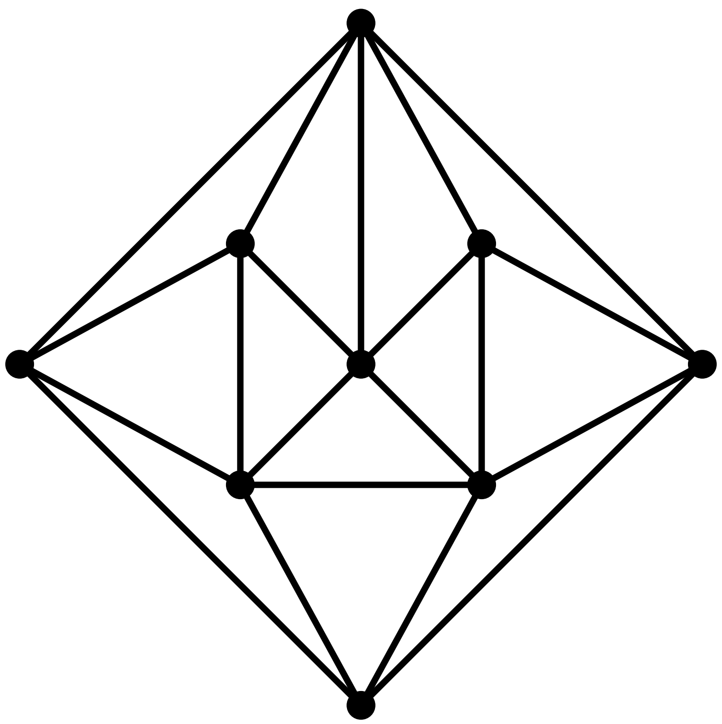
今日の内容

- 外 k-平面的グラフの定義
- 外 (k-) 平面的グラフの三角形分割と応用
- 下界

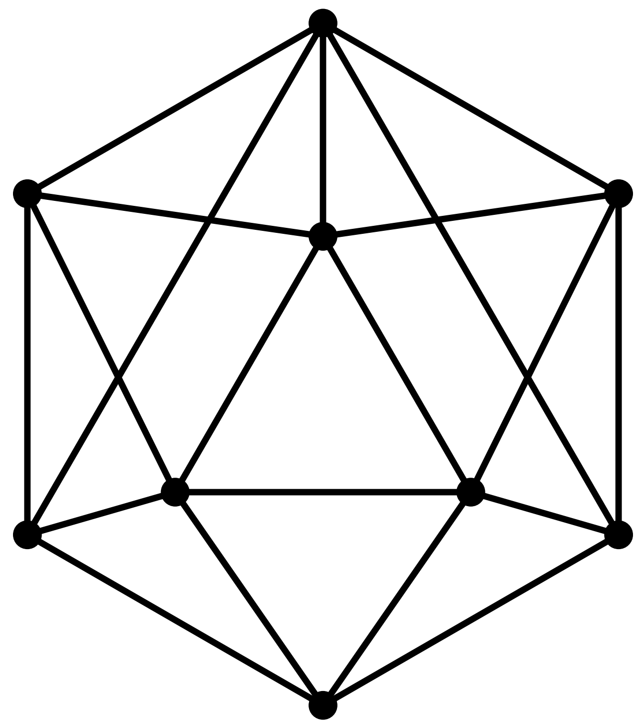
k-平面的グラフ

各辺の交差回数が高々 k の平面への描画が存在するグラフ．

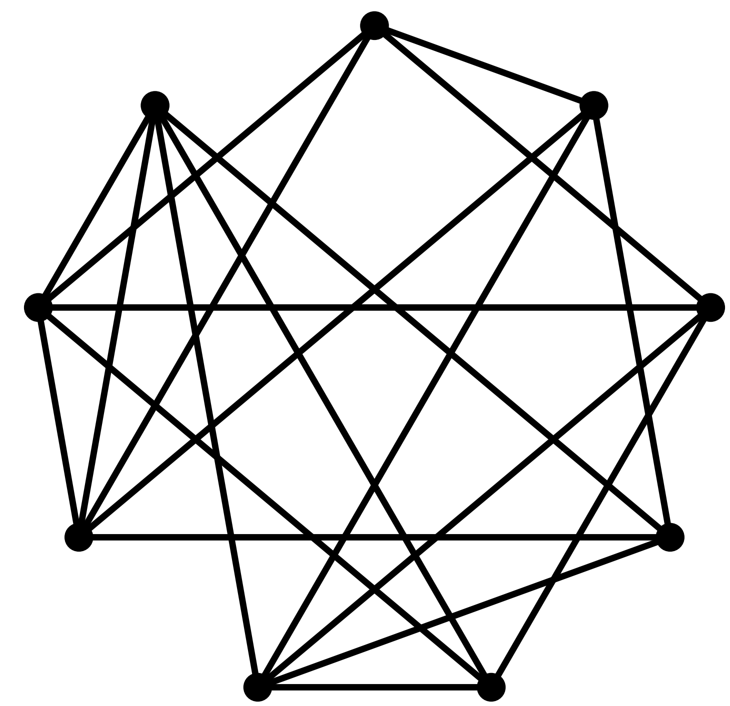
これを k-平面的グラフと呼ぶ．（$k = 0$ で平面的グラフ）



0-平面描画



2-平面描画



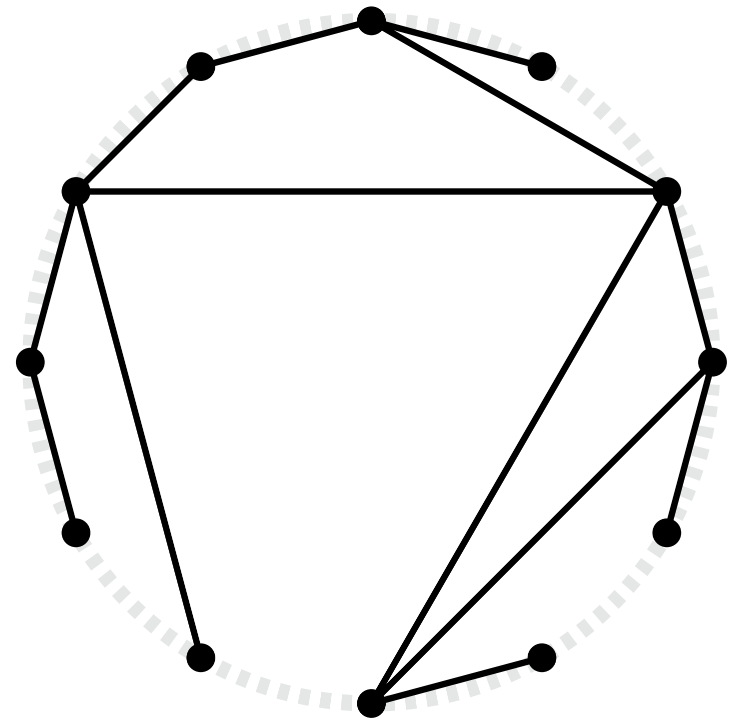
8-平面描画

外 k-平面的グラフ

外平面的グラフとは

以下の平面への描画が存在.

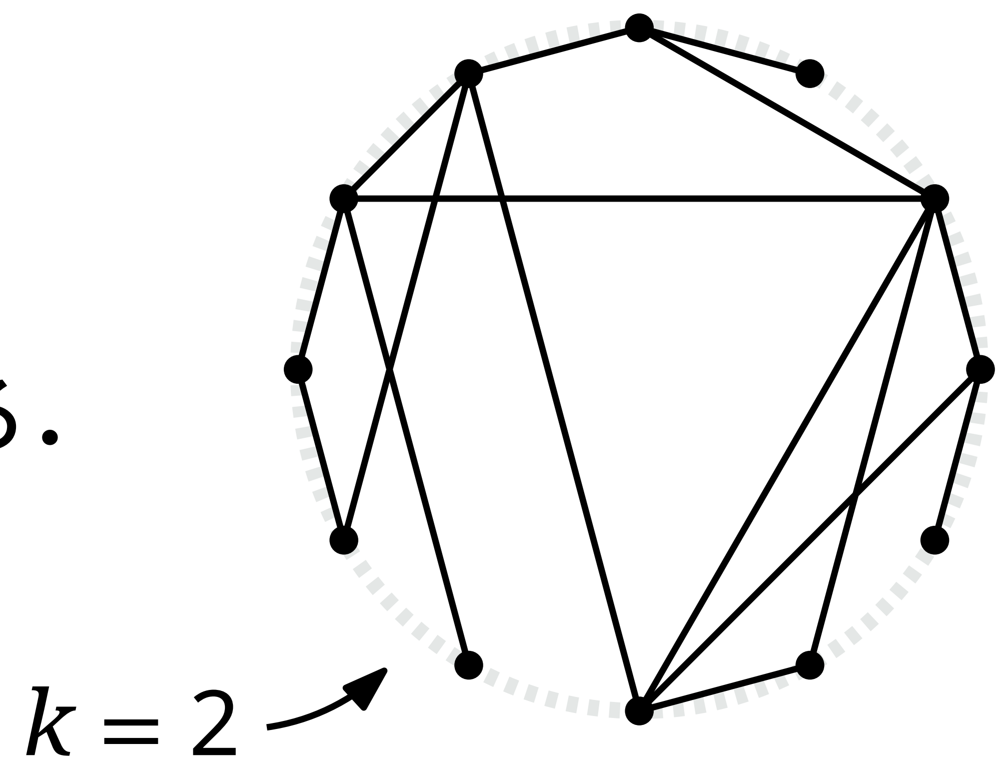
- すべての頂点が円周上にある.
- 辺が線分.
- 辺の交差なし.



外 k-平面的グラフとは

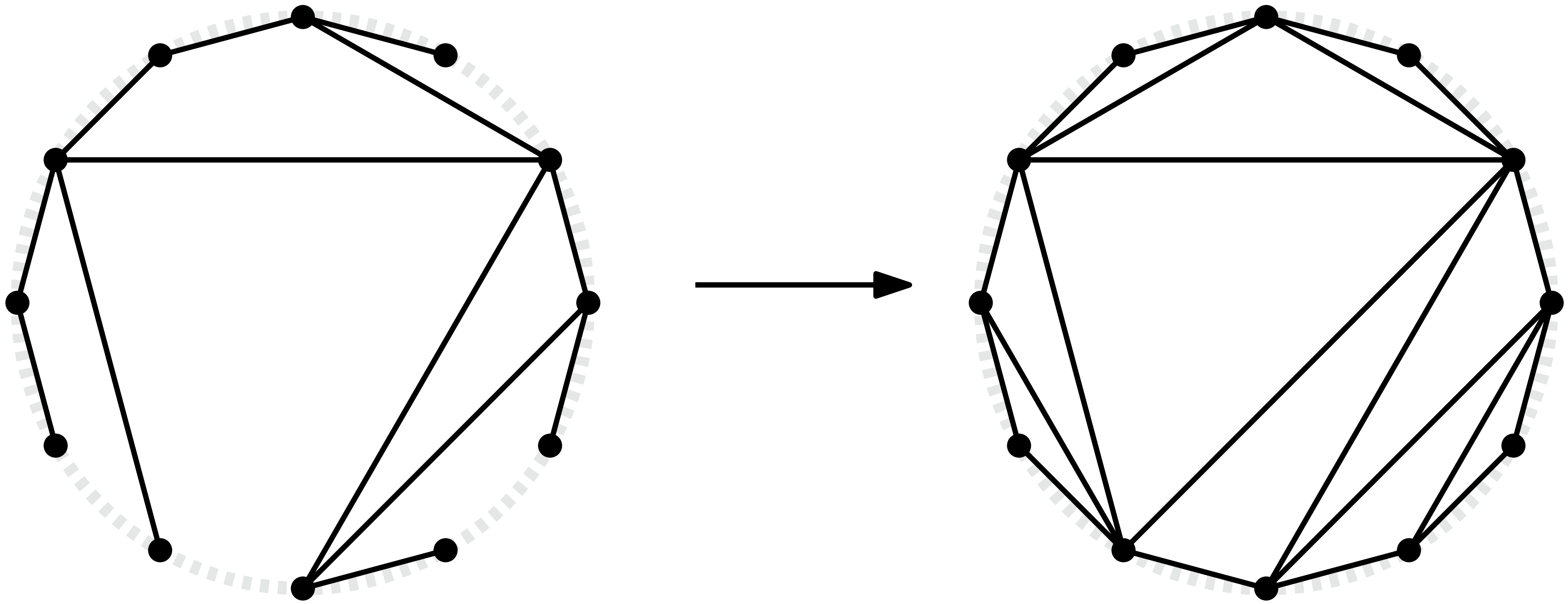
以下の平面への描画が存在.

- すべての頂点が円周上にある.
- 辺が線分.
- 各辺の交差が高々 k 回.



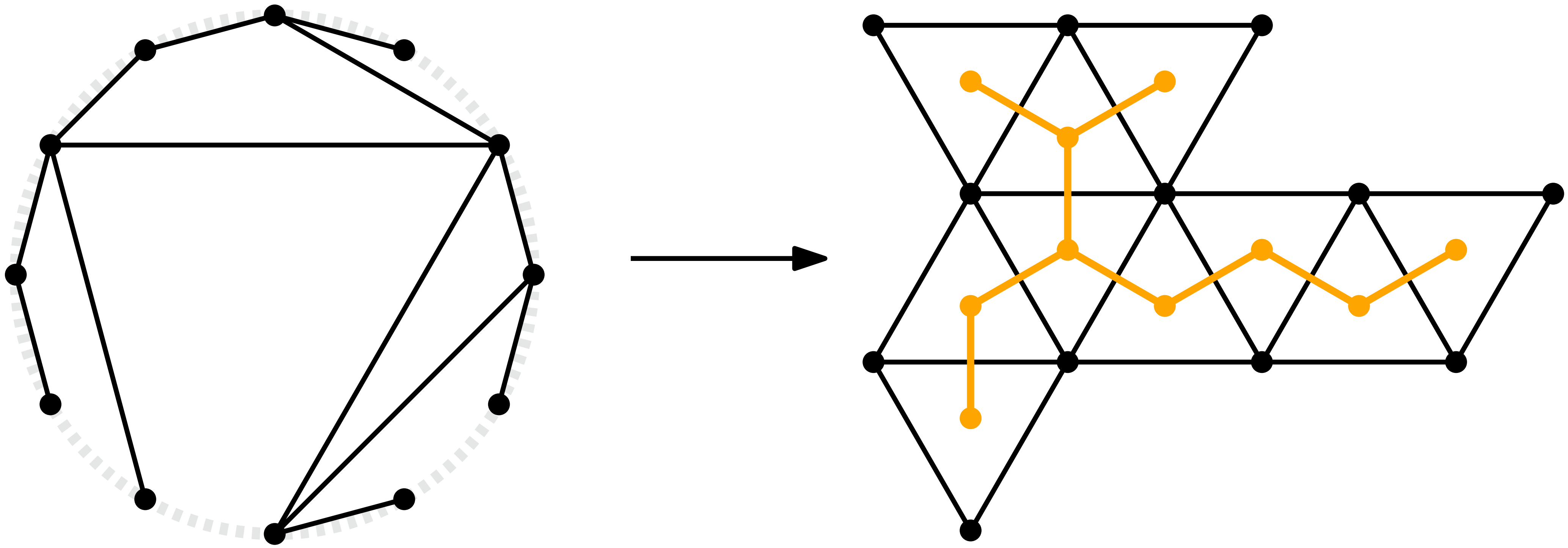
外平面的グラフの三角形分割

外平面的グラフの描画に可能な限り辺を加える．
極大な外平面的描画では，すべての面が三角形になる．



外平面的グラフの三角形分割

外平面的グラフの描画に可能な限り辺を加える．
極大な外平面的描画では，すべての面が三角形になる．

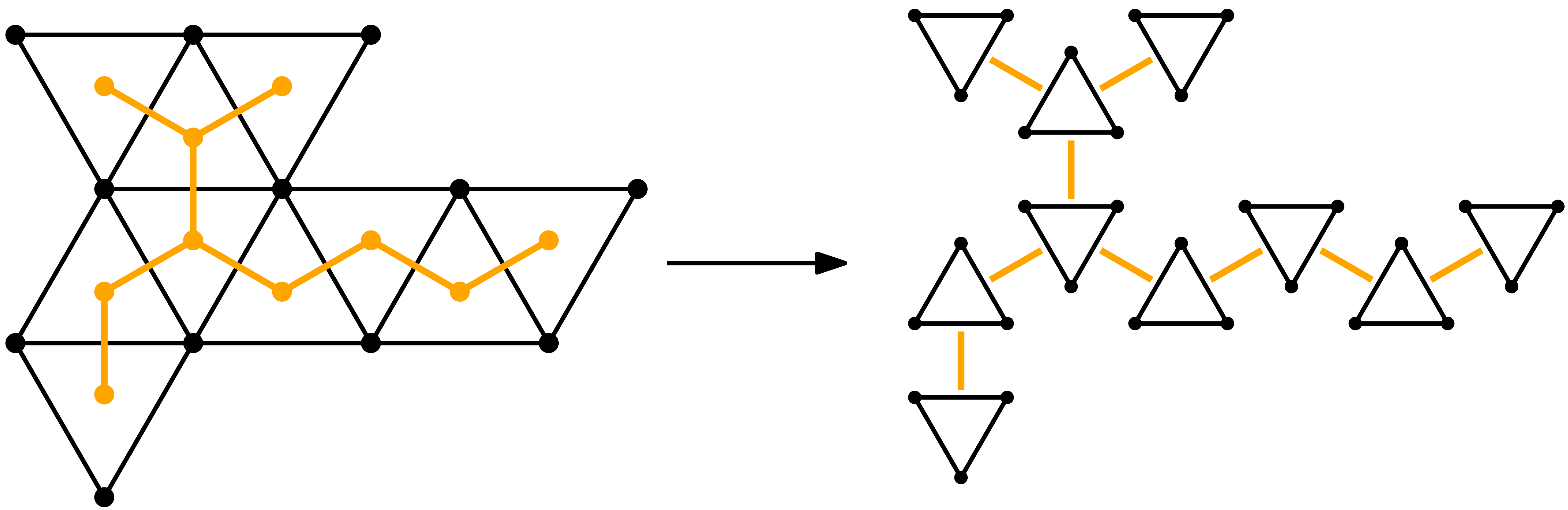


嬉しい性質

極大外平面グラフの弱双対グラフは，木である．

外平面的グラフの木幅

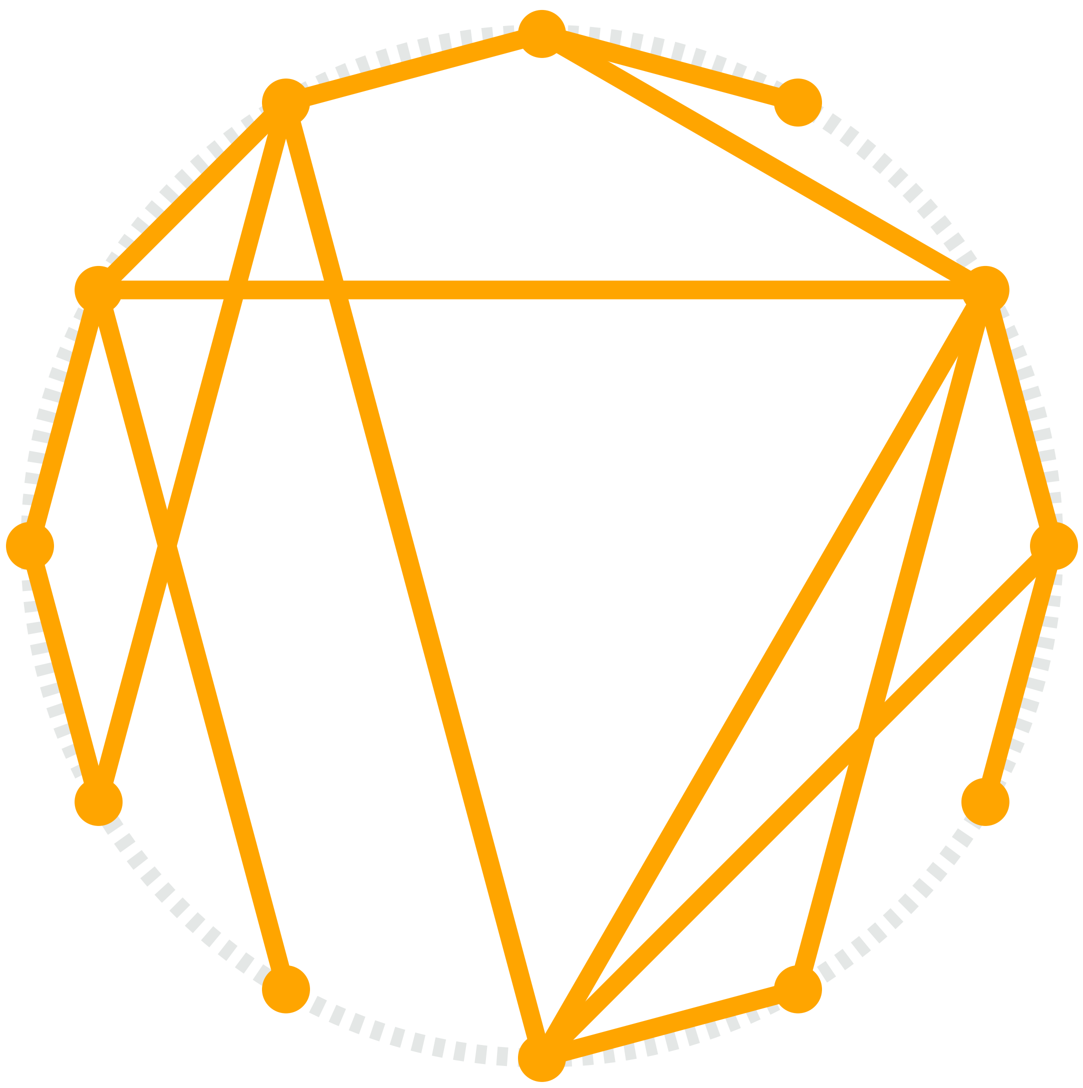
三角形分割を使うと，簡単に外平面的グラフの木幅を示せる．
弱双対グラフの各頂点を，対応する三角形で置き換える．



右は幅 2 の木分解になっているため，木幅は高々 2．

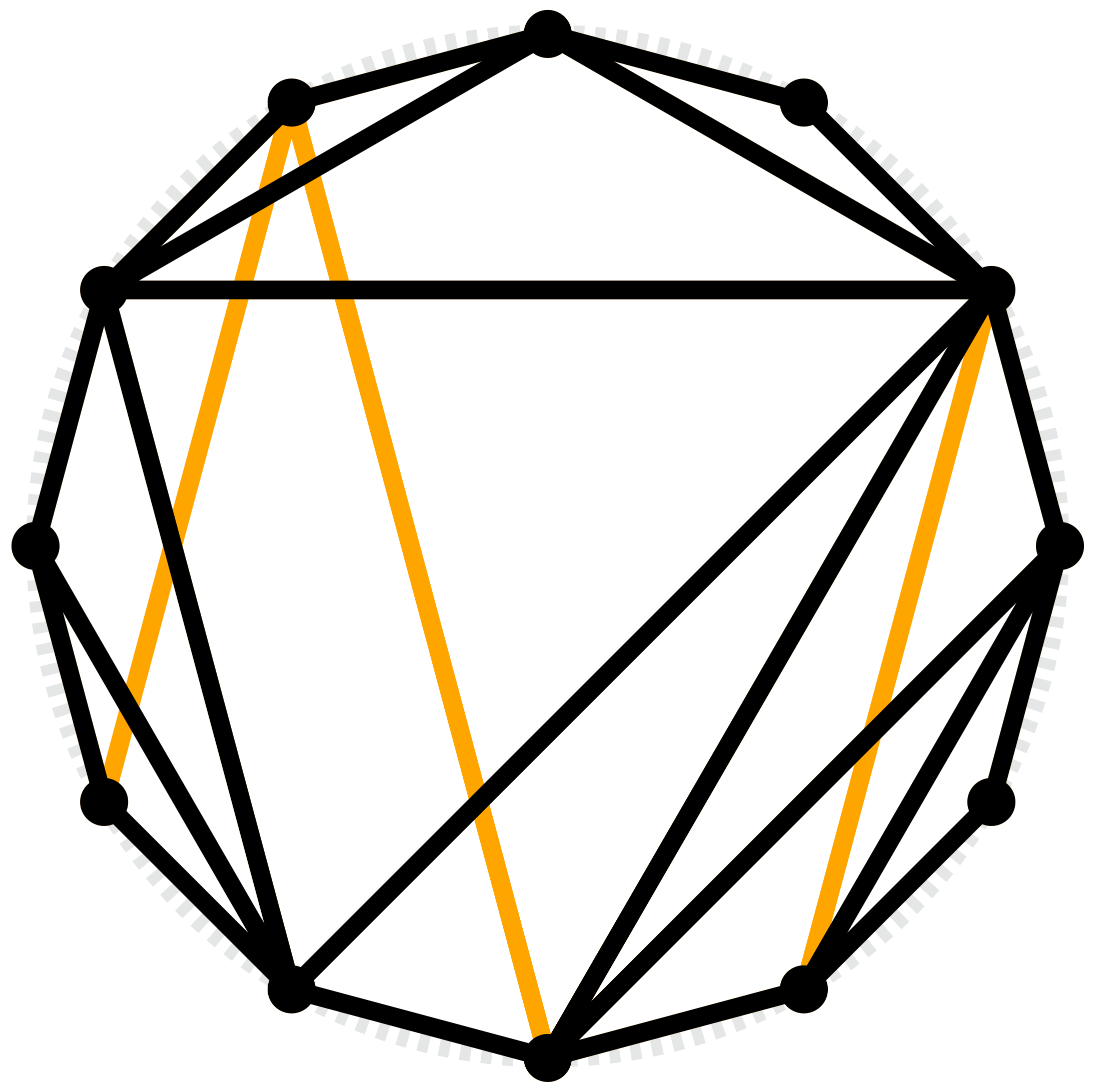
外 k-平面的グラフの三角形分割

外 k-平面的グラフの描画が与えられたとき，



外 k-平面的グラフの三角形分割

外 k-平面的グラフの描画が与えられたとき，



その上に「元のグラフの辺との交差が高々 k 回の辺」のみで
極大外平面グラフを描くことが可能！

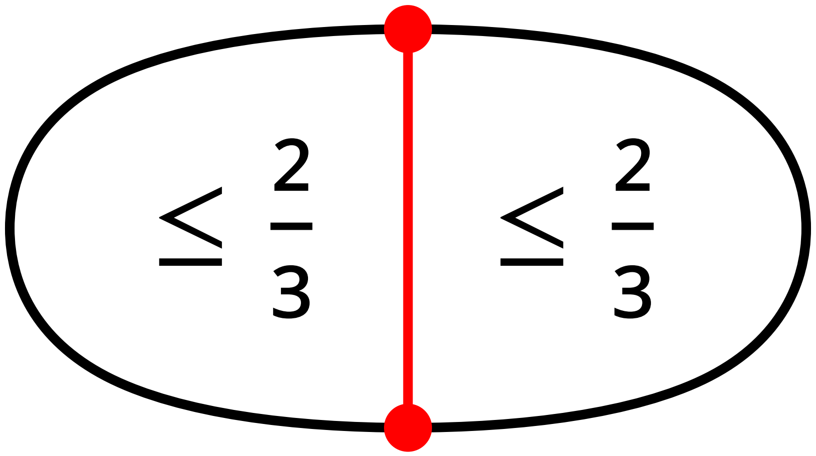
三角形分割の嬉しさ・応用

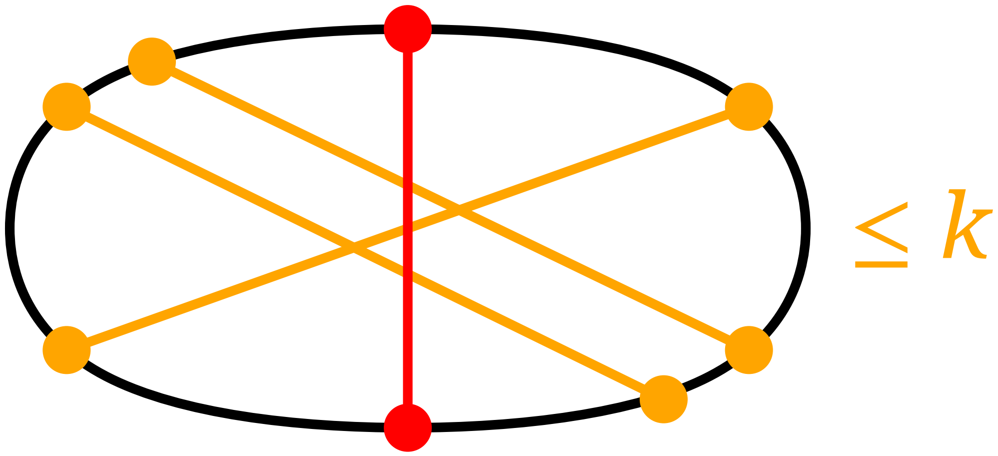
外 k-平面的グラフが，"ほぼ極大外平面的グラフ" になる．
→ 極大外平面的グラフの話を k-平面的に一般化しやすい．

separation number

- 極大外平面的グラフでは，「端点を削除すると残りの連結成分のサイズが 2/3 以下になる」辺が存在する．
- 外 k-平面的では，交差高々 k 回のそのような辺が存在．追加で k 頂点を削除すれば，同様に 2/3 以下にできる．

→ separation number 高々 $k+2$．





三角形分割の嬉しさ・応用

外 k-平面的グラフが，“ほぼ極大外平面的グラフ” になる．
→ 極大外平面的グラフの話を k-平面的に一般化しやすい．

separation number

- 極大外平面的グラフでは，「端点を削除すると残りの連結成分のサイズが 2/3 以下になる」辺が存在する．
- 外 k-平面的では，交差高々 k 回のそのような辺が存在．追加で k 頂点を削除すれば，同様に 2/3 以下にできる．

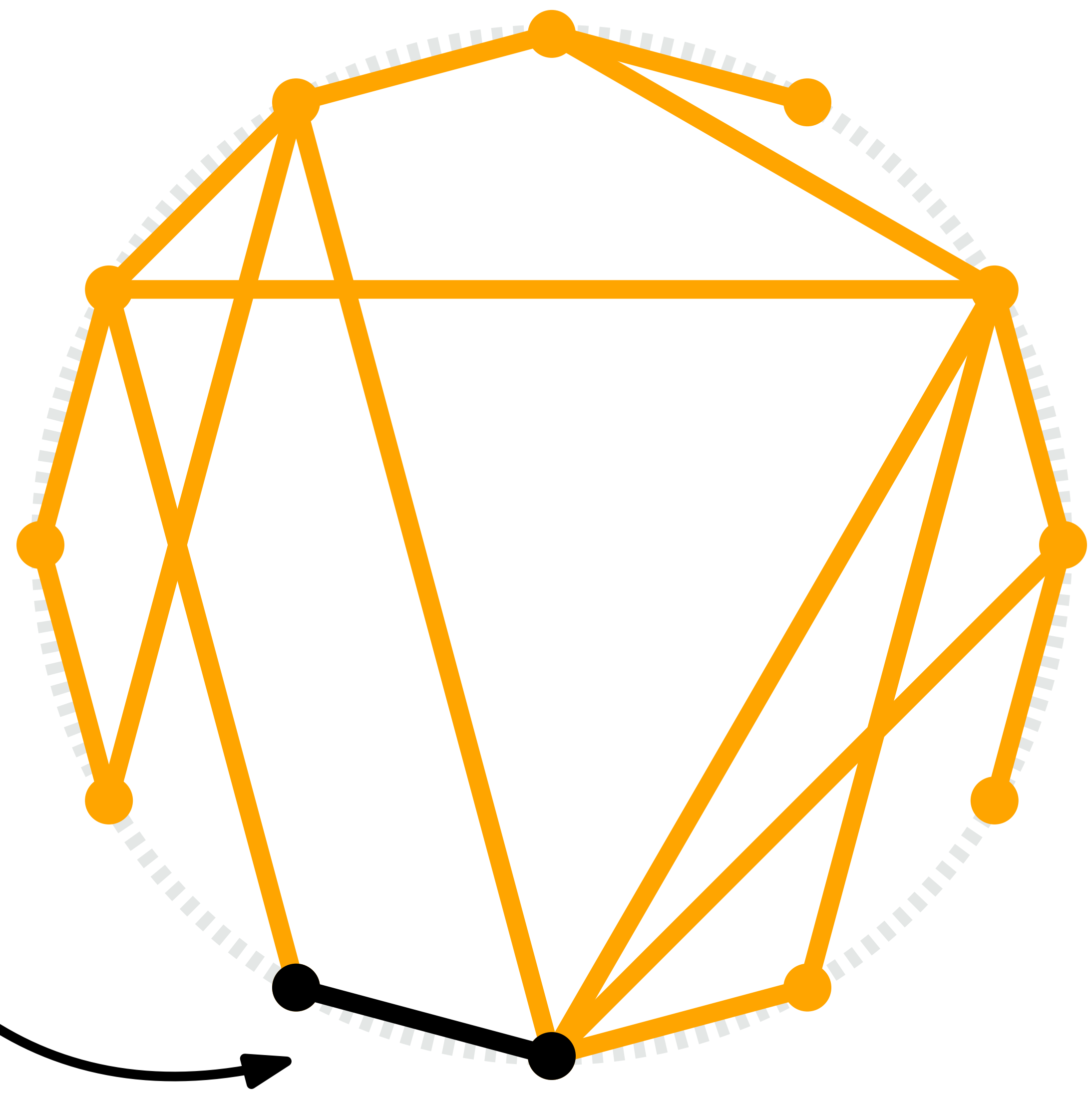
→ separation number 高々 $k + 2$.

木幅

- 極大外平面的グラフの弱双対から幅 2 の木分解が作れる．
- 残りの辺の情報を足す．各三角形を高々 $3k$ 本しか通らず，愚直でも幅 $3k + 2$，工夫すると $1.5k + 2$ になる．

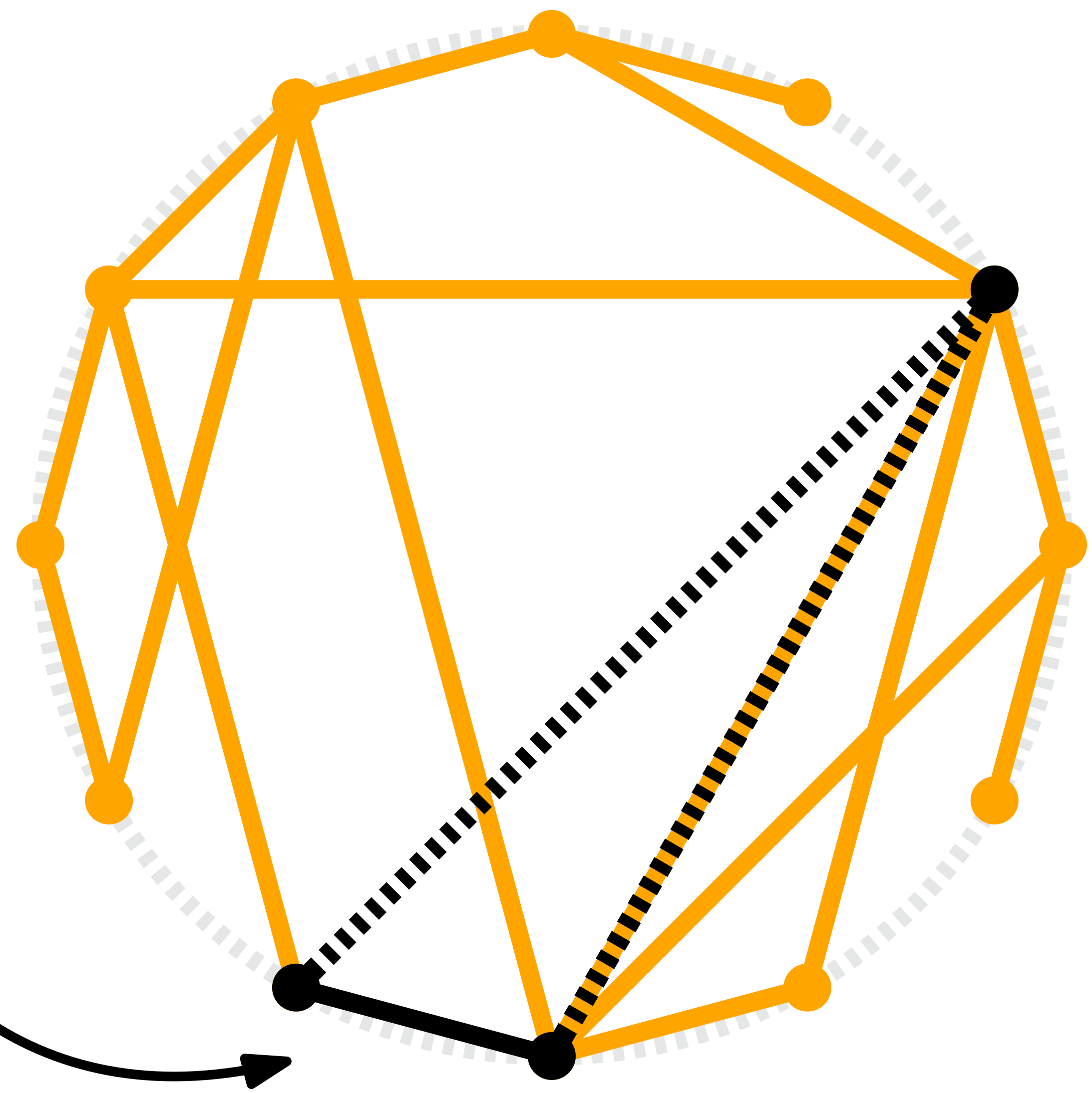
三角形分割の貪欲アルゴリズム

まず，**任意の外側の辺**を三角形分割の辺として採用する．



三角形分割の貪欲アルゴリズム

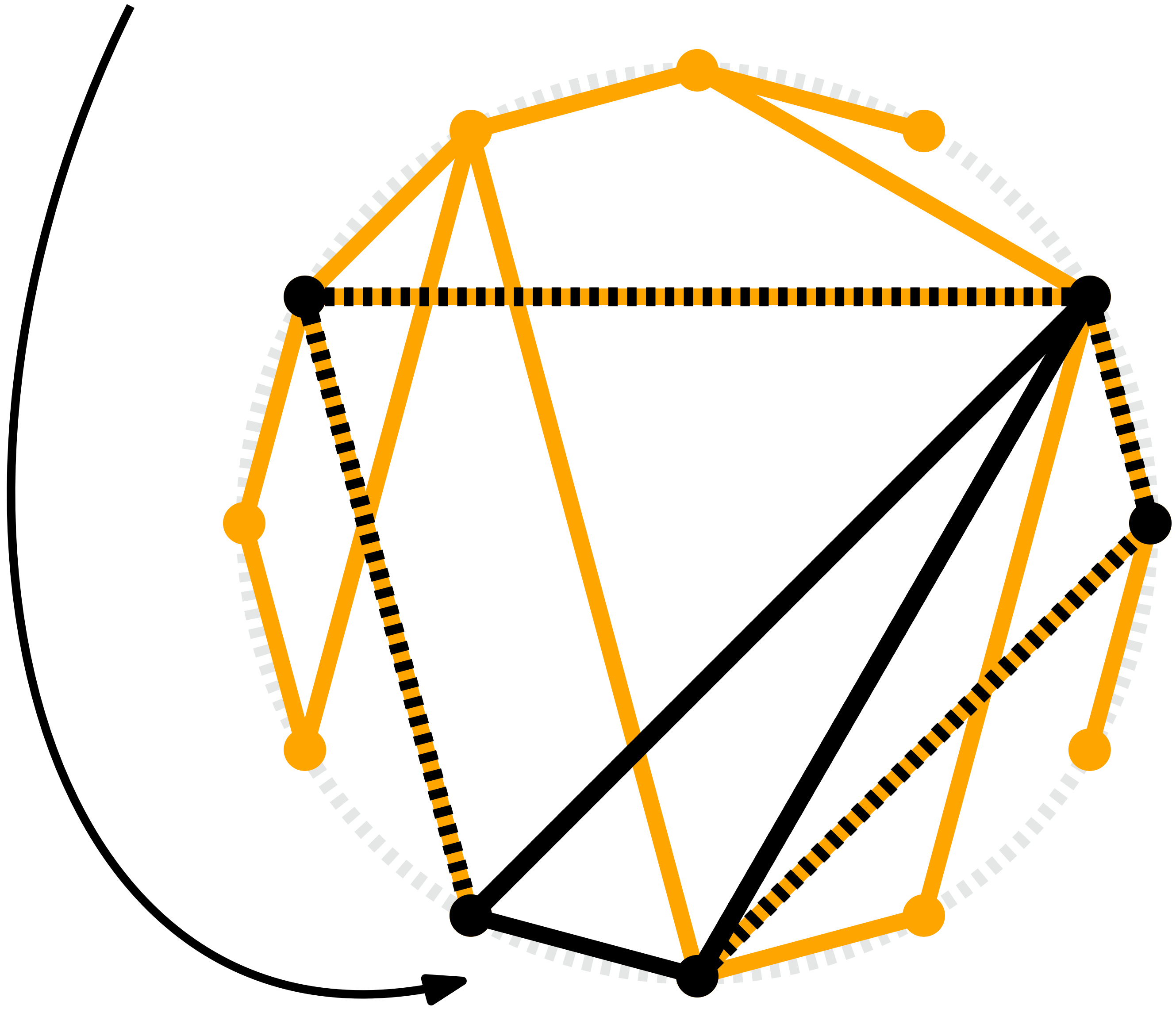
まず，**任意の外側の**辺を三角形分割の辺として採用する．



ある頂点が存在して，交差高々 k 回の辺で繋げられる（後述）．

三角形分割の貪欲アルゴリズム

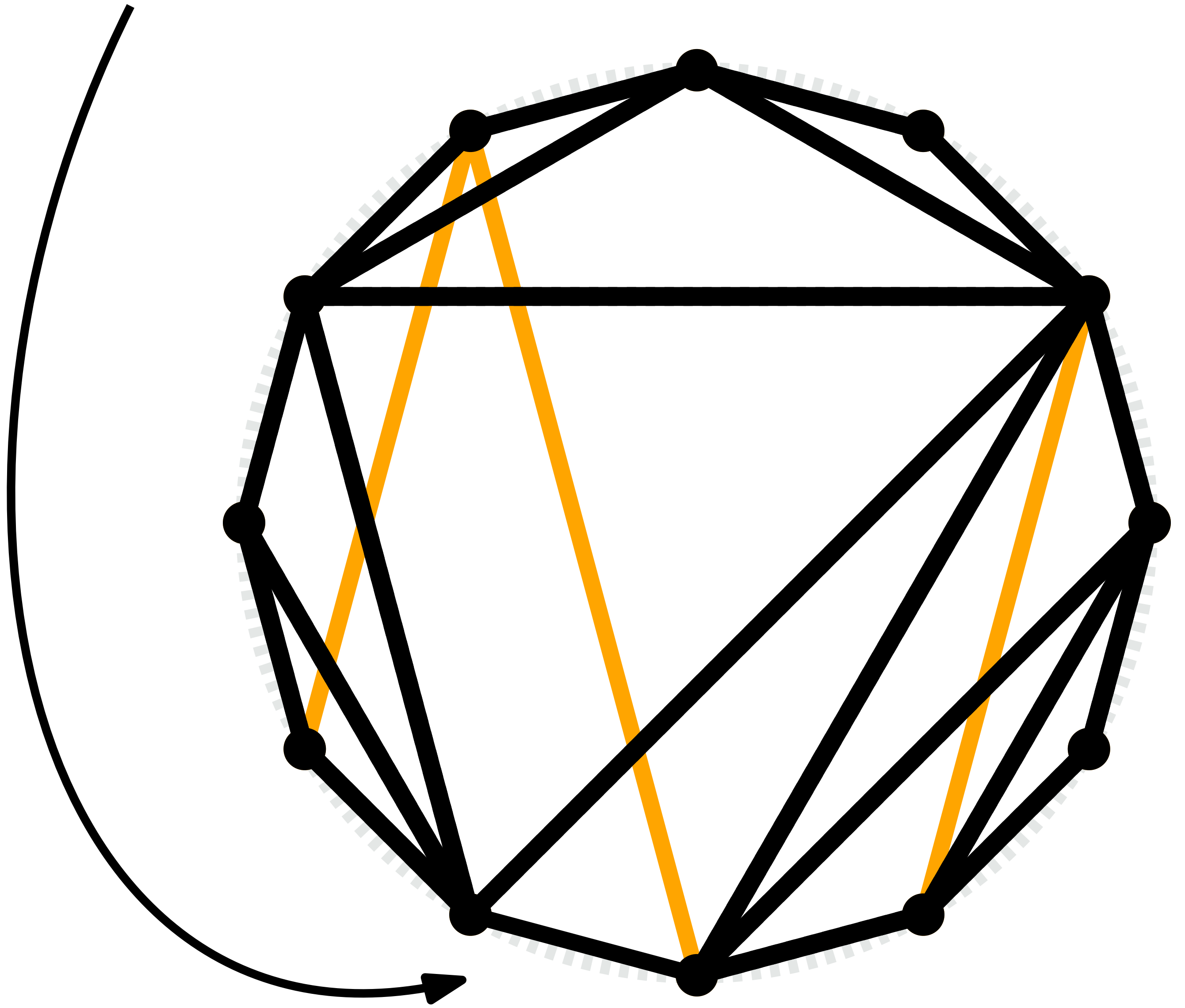
まず，任意の外側の辺を三角形分割の辺として採用する．



ある頂点が存在して，交差高々 k 回の辺で繋げられる（後述）．
実は，その後も常にそのような “都合の良い頂点” が存在する．

三角形分割の貪欲アルゴリズム

まず，**任意の外側の辺**を三角形分割の辺として採用する．



ある頂点が存在して，交差高々 k 回の辺で繋げられる（後述）．

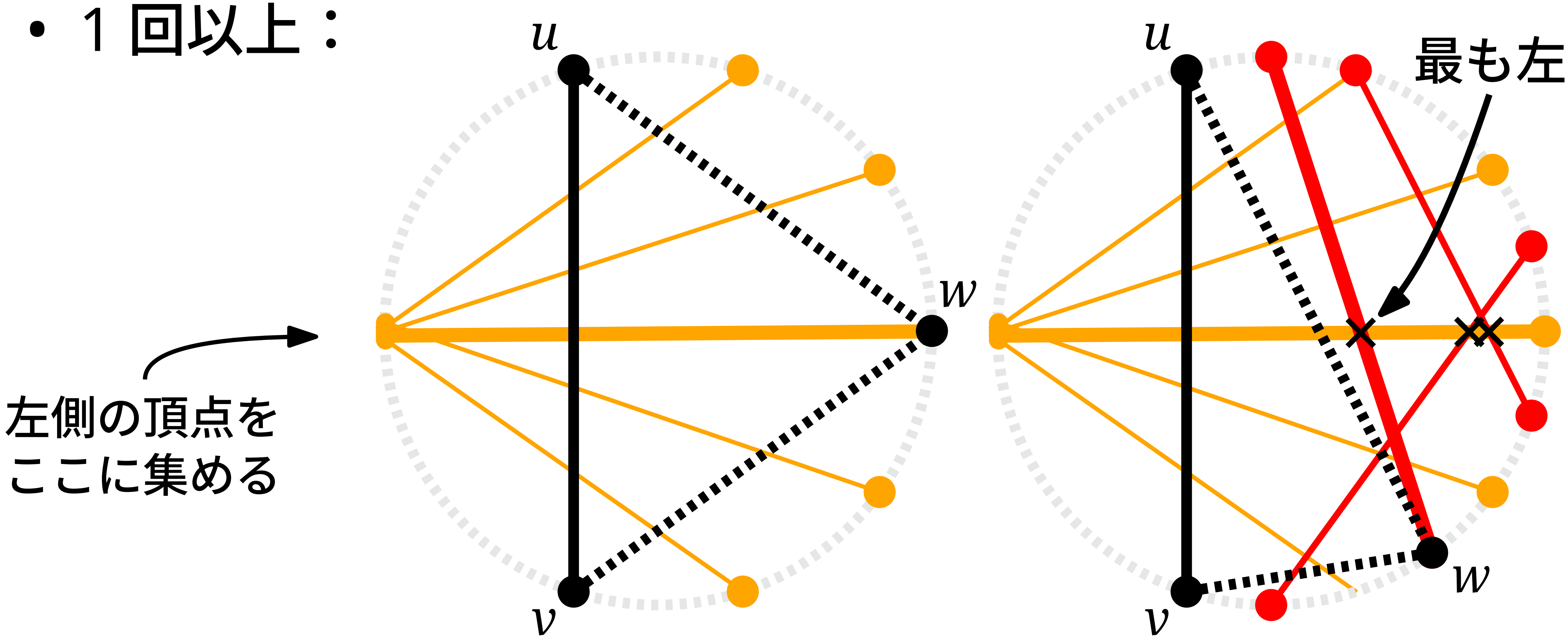
実は，その後も常にそのような "都合の良い頂点" が存在する．

貪欲アルゴリズムの正当性

示すべき性質

元のグラフとの交差高々 k 回の辺 $\{u,v\}$ に対し，
ある頂点 w が存在し，辺 $\{u,w\}$ と $\{v,w\}$ も高々 k 回交差．

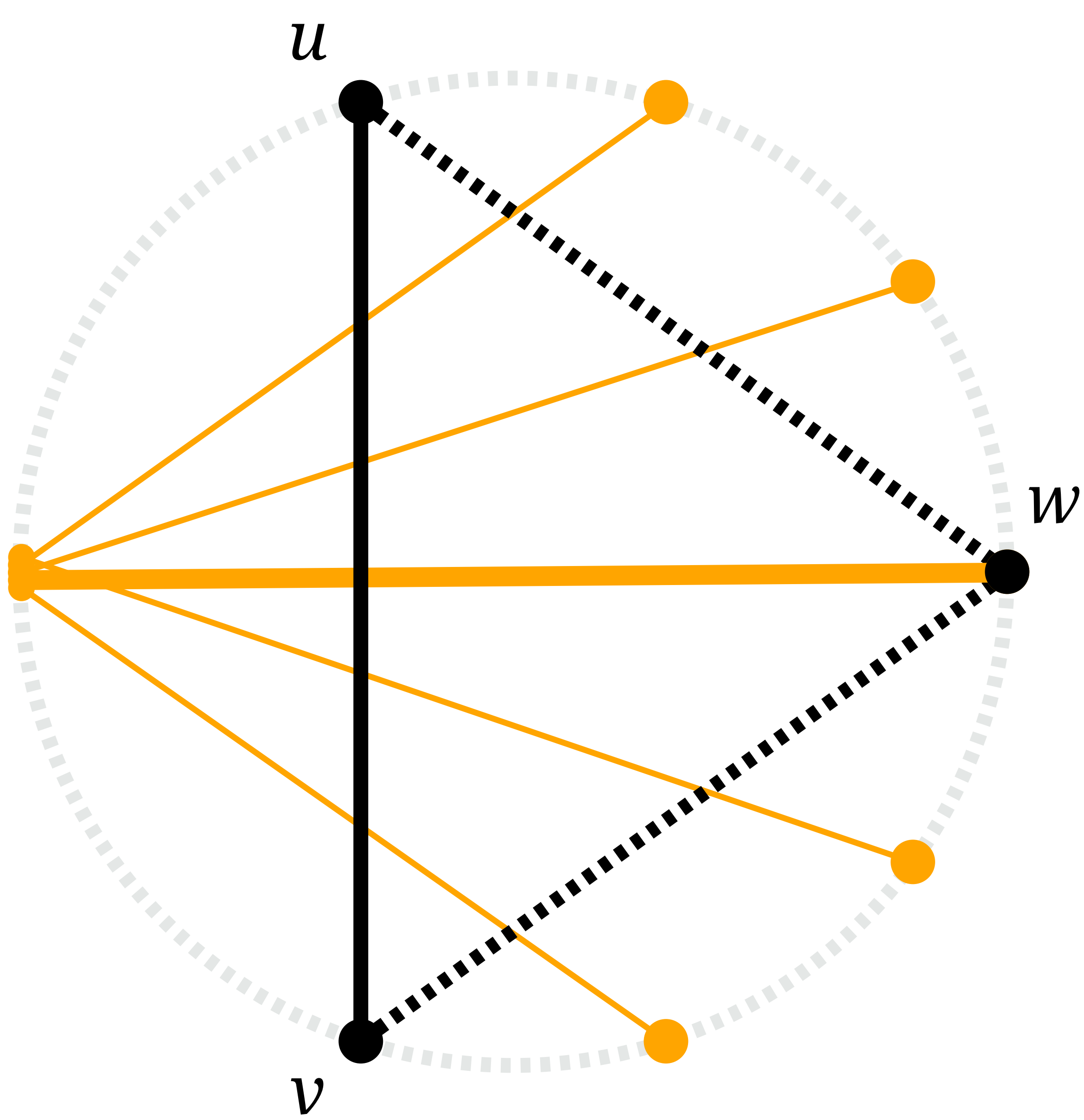
- 辺 $\{u,v\}$ が交差 0 回のとき：場合分けで証明可能（省略）
- 1 回以上：



真ん中の辺が右側で交差　(1) しない場合　　(2) する場合

真ん中の辺が交差しない場合

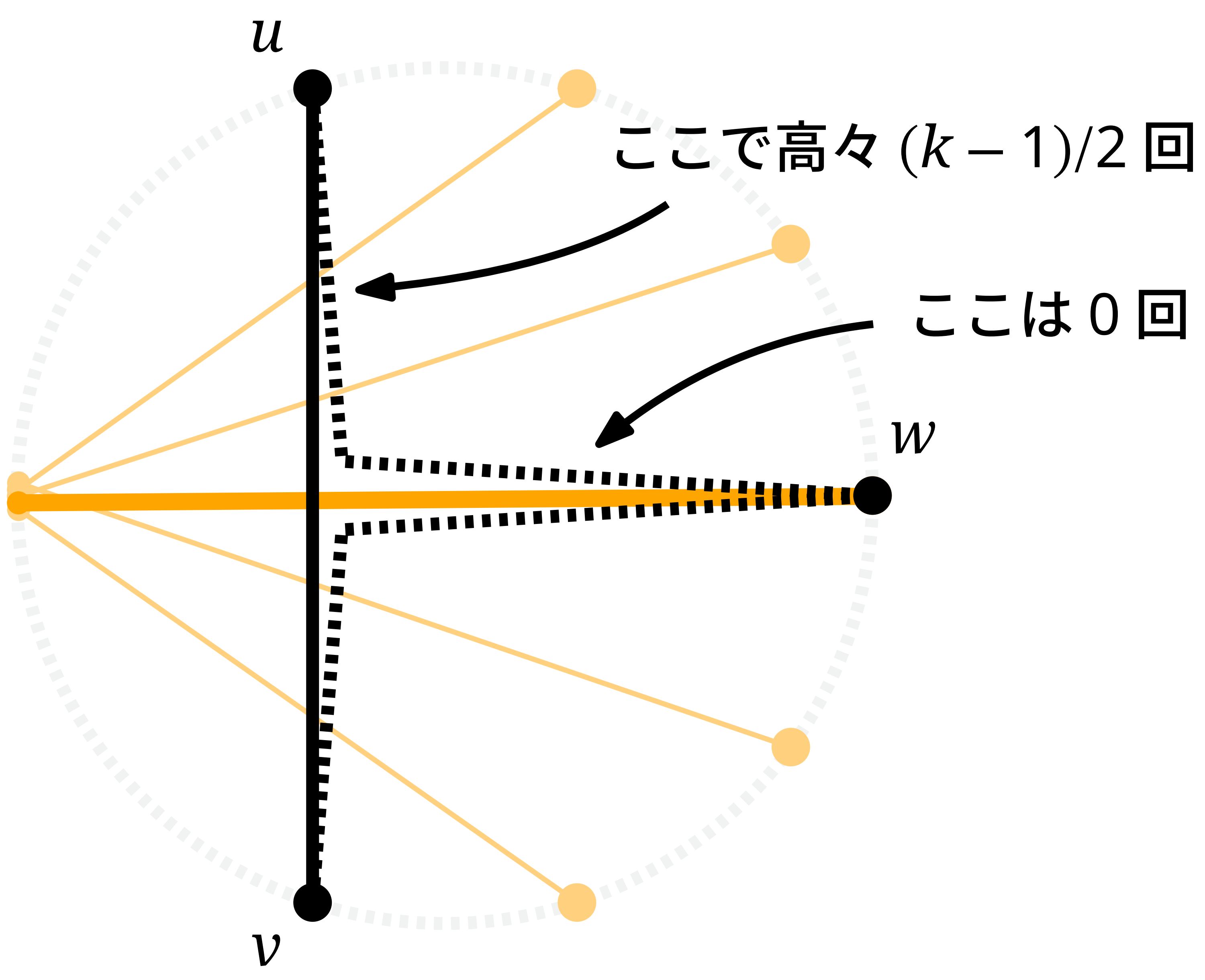
辺を曲げて描いても交差数は減らない．
他の辺に沿って辺を描くと，交差数がバウンドできる．



真ん中の辺が交差しない場合

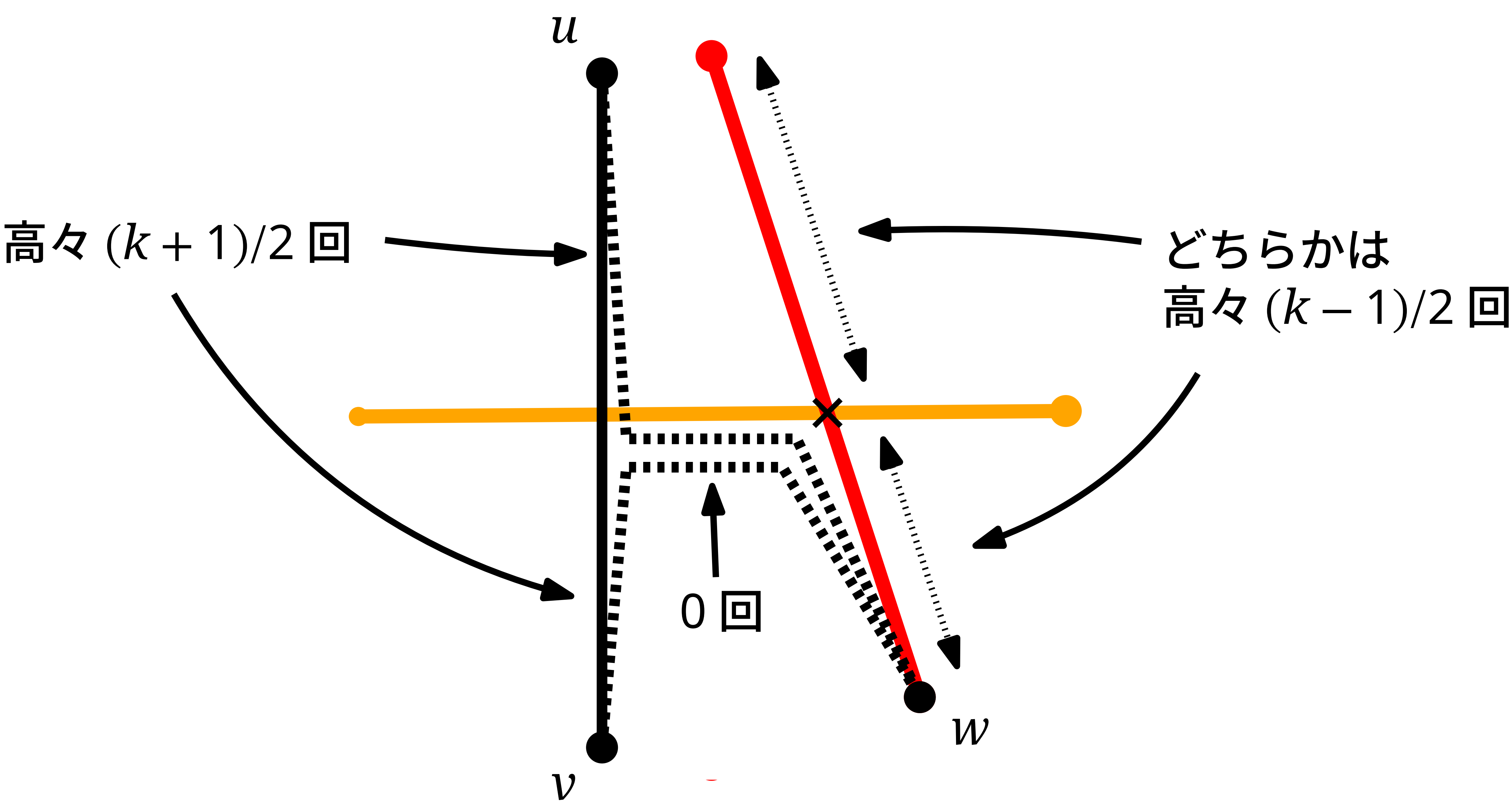
辺を曲げて描いても交差数は減らない．

他の辺に沿って辺を描くと，交差数がバウンドできる．



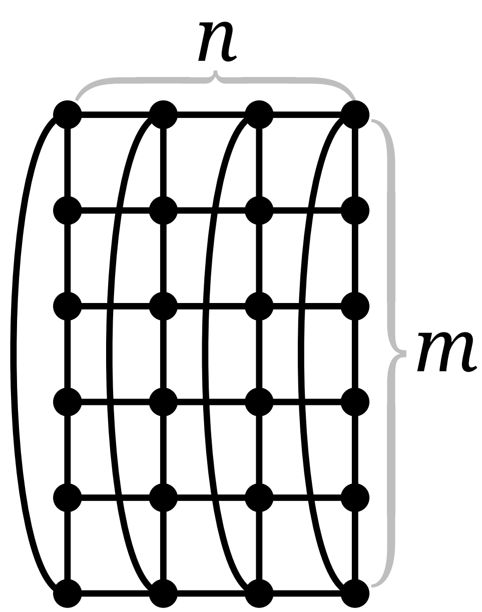
真ん中の辺が交差する場合

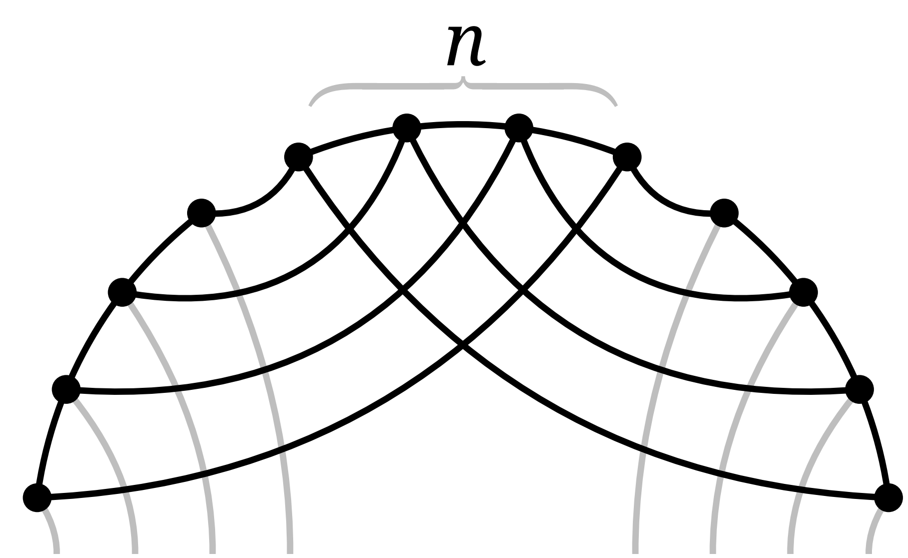
交差が最も左の辺を選んだため，中盤の交差が 0 回になる．
それを交差点で分割し，交差が少ない方の端点へ向かう．



Stacked Prisms による下界

stacked prism は，グリッドの上下を繋いだもの．





m が十分大きい偶数のとき，$m \times n$ stacked prism は

- 外 $(2n-2)$ 平面的グラフであり，
- 木幅が $2n$ であり，
- separation number も $2n$ であると証明できる．

$\rightarrow$ 任意の偶数 $k \geq 0$ に対して，外 k-平面的，木幅が $k+2$，かつ separation number が $k+2$ のグラフが存在する．

まとめ・展望

今回の結果

- 交差の少ない三角形分割の存在を証明し，上界を改善．
- それらに対する，stacked prism を用いた下界の証明．

k	上界	下界
一般	$k+2$	$k+2$

separation number
（示した結果はオレンジ）

k	上界	下界
0	2	$2(K_3)$
1	3	$3(K_4)$
2	4	$4(K_5)$
一般	$1.5k+2$	$k+2$

木幅

今後の展望

- 木幅の係数のギャップを詰める（$k+2$ と予想）．
- 外 k-平面的かどうかの多項式時間判定（オープン）．
- k-平面的グラフの三角形分割？

付録：木分解と木幅の定義

木分解

グラフ $G = (V, E)$ に対して，以下の条件を満たす
木 T と $\mathcal{V} = (V_t(\subseteq V))_{t \in V(T)}$ の組 $(T, \mathcal{V})$ を G の木分解という．

バッグ

- 任意の $v \in V$ に対し，ある $t \in V(T)$ が存在して $v \in V(T)$．
- 任意の辺 $\{u, v\} \in E$ に対し，ある t が存在して $u, v \in V_t$．
- 任意の $v \in V$ について，v を含むバッグは T 上で連結．

木幅

木分解 $(T, \mathcal{V})$ の幅は，$\max_{t \in V(T)} |V_t| - 1$．

グラフ G の木幅とは，あり得る G の木分解の最小の幅．

付録：外 k-平面的グラフに関する先行研究

外 k-平面的グラフについては，以下のことがわかっている．

認識：グラフが外 k-平面的か判定する問題

- $k = 0$ のとき線形時間で可能 [Mitchell, 1979]
- $k = 1$ のとき線形時間で可能 [Auer et al., 2013]
- 固定した k について準多項式時間 [Chaplick et al, 2017]
（ETH $\to$ NP 困難ではない）

各種パラメータ

- サイズ $2k + 3$ の balanced separator
- 木幅高々 $6\lfloor k/2 \rfloor + 11$ [Wood & Telle, 2007]
- $k = 0, 1$ のとき木幅高々 $2, 3$ [Auer et al., 2013]