Dichotomies for Tree Minor Containment with Structural Parameters

Tatsuya Gima[1], Soh Kumabe[2], Kazuhiro Kurita[1], Yuto Okada[1], Yota Otachi[1]

2023-07-03 夏の LA シンポジウム @ 函館

[1] Nagoya University, [2] The University of Tokyo

概要

次の問題を考える．一般の木では，NP 完全である．

Tree Minor Containment

入力：木 T, P.
質問：T は P をマイナーとして含むか？

そこで，以下のパラメータを制限した場合を考える．

- 直径
- パス離心数
- パス幅

各パラメータについて，「定数いくつまで制限すると多項式時間で解けるのか/いくつから NP 困難になるのか」境界を明らかにする．

準備：マイナー

マイナー

グラフ G が H をマイナーとして含むとは，G に対して以下の操作を繰り返して H が得られることをいう．

- 頂点の削除
- 辺の削除
- 辺の縮約（図のように，辺の端点を 1 つの頂点にする）

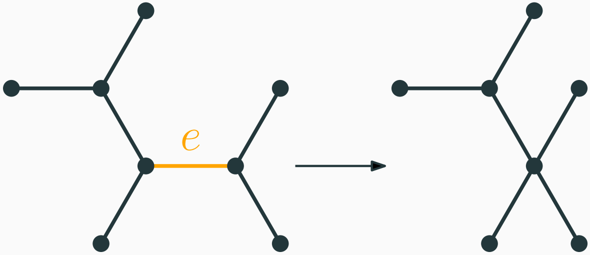


図 1: 辺 e の縮約

準備：キャタピラ

本研究で重要なグラフクラス，キャタピラ（毛虫）も定義する．

キャタピラ

グラフ $G = (V, E)$ がキャタピラであるとは，G が木かつ，G 上の単純パス P で以下を満たすものが存在することをいう．

- すべての頂点 $v \in V$ について，v から P までの距離が 1 以下．

上記の P を背骨と呼び，背骨から足が生えたような形の木である．

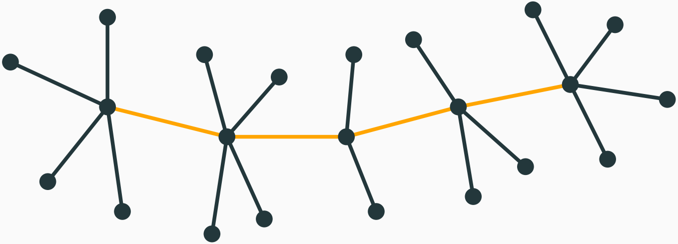


図 2: キャタピラの例

準備：各種パラメータの定義

グラフ $G=(V,E)$ に対し，それぞれ $\mathrm{diam}(G), \mathrm{pe}(G), \mathrm{pw}(G)$ で表す．

直径（diameter）

2 点間の距離の最大値 $\max_{u,v\in V} \mathrm{dist}(u,v)$．

パス離心数（path eccentricity）

以下を満たす最小の k．

- ある G 上の単純パス P が存在し，すべての頂点 $v \in V$ について，v から P までの距離が k 以下．

キャタピラの一般化でキャタピラ $\Leftrightarrow$ パス離心数 1 以下の木である．

パス幅（pathwidth）

詳しい説明省略．キャタピラ $\Leftrightarrow$ パス幅 1 以下の木が知られている．

他の containment 系の問題との比較

グラフがグラフを○○として含むか？はよく研究されている．

Subgraph Isomorphism

質問：G は H を部分グラフとして含むか？

Topological Minor Containment

質問：G は H を位相的マイナー（説明略）として含むか？

Minor Containment

質問：G は H をマイナーとして含むか？

これらの問題は一般のグラフ上ではすべて NP 完全．G, H を木に制限すると，部分グラフと位相的マイナーは多項式時間で解ける．

しかし，マイナーの場合は木に制限しても NP 完全．

どれだけ制限された木なら多項式時間で解けるのか？

先行研究：木における計算量（最大次数・直径）

P の最大次数 d が小さいとき，多項式時間で解ける．

Kilpeläinen and Mannila, 1995[1]

Tree Minor Containment は $O(4^d \cdot \mathrm{poly}(|T|))$ 時間で解ける．

Akutsu et al., 2021[2]

Tree Minor Containment は $O(2^d \cdot \mathrm{poly}(|T|))$ 時間で解ける．

一方で，直径 は定数で抑えても難しい．

Matoušek and Thomas, 1992[3]

Tree Minor Containment は $\mathrm{diam}(T), \mathrm{diam}(P) \leq 8$ でも NP 完全．

[1] *https://doi.org/10.1137/S0097539791218202*
[2] *https://doi.org/10.1016/j.tcs.2021.06.013*
[3] *https://doi.org/10.1016/0012-365X(92)90687-B*

先行研究：木における計算量（パス離心数・パス幅）

キャタピラ同士なら多項式時間で解ける.

Gupta et al., 2005[4]（の系）

T, P がキャタピラのとき，T が P をマイナーとして含むかは多項式時間で判定可能.

すなわち，Tree Minor Containment は，

- パス離心数 $\mathrm{pe}(T), \mathrm{pe}(P) \leq 1$ のとき，多項式時間で解ける.
- パス幅 $\mathrm{pw}(T), \mathrm{pw}(P) \leq 1$ のとき，多項式時間で解ける.

キャタピラから多項式時間で解けるクラスを拡げる方向として，
パス離心数・パス幅を考える.

[4] *https://doi.org/10.1016/j.dam.2002.12.005*

我々の結果：直径

木 T, P の直径について，P/NP 完全（NPC）の境界を明らかにした．

$\mathrm{diam}(P)$ \ $\mathrm{diam}(T)$	≤ 3	4	5	≥ 6
≤ 3	P			
4				NPC
5				
≥ 6				

テーブル 1: 直径における計算量

- 「$\mathrm{diam}(T) \leq 6, \mathrm{diam}(P) \leq 4$ でも NP 完全」[5]を示した．
- それより制限したとき，多項式時間で解けることを示した．

[5]先行研究では $\mathrm{diam}(T), \mathrm{diam}(P) \leq 8$

我々の結果：パス離心数・パス幅

パス離心数・パス幅でも P/NP 完全の境界を明らかにした．

$\mathrm{pe}(P)$ \ $\mathrm{pe}(T)$	≤ 1	2	≥ 3
≤ 1		P	
2			NPC
≥ 3			

テーブル 2: パス離心数

$\mathrm{pw}(P)$ \ $\mathrm{pw}(T)$	≤ 1	2	≥ 3
≤ 1		P	
2		NPC	
≥ 3			

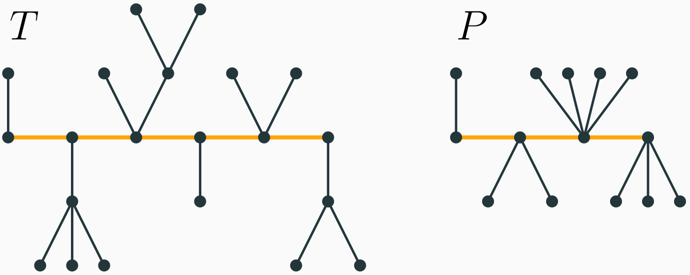
テーブル 3: パス幅

- それぞれ，$\mathrm{pe}(T) \leq 3, \mathrm{pe}(P) \leq 2$ あるいは，$\mathrm{pw}(T), \mathrm{pw}(P) \leq 3$ でも NP 完全であることを示した．
- それより制限したとき，多項式時間で解けることを示した．

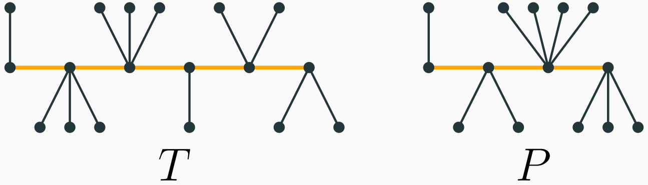
この中で「木 P がキャタピラならば多項式時間で解ける」について簡単に説明する．

P がキャタピラのときの多項式時間アルゴリズム (1)

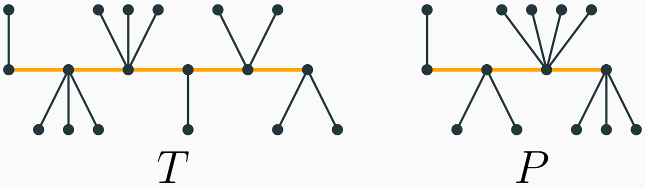
「木 P の背骨を，木 T のどのパスに埋め込むか」を全通り試す．



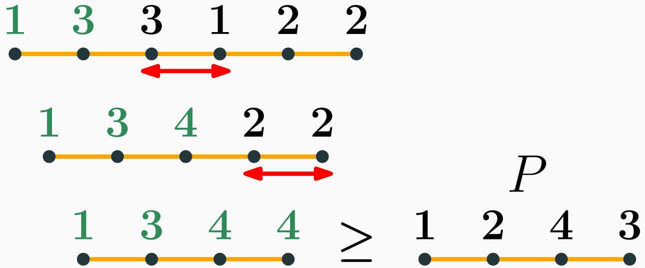
実は，埋め込み先のパスと葉以外の T の頂点は使っても得しない．
つまり，適切に縮約して葉をパスにつけたものへ帰着できる．



P がキャタピラのときの多項式時間アルゴリズム (2)



あとは次数だけ見て，縮約して各次数を P 以上にできるか判定する．
これは左から次数が足りるまで縮約していくと判定できる．



我々の結果：パス離心数・パス幅

パス離心数・パス幅でも P/NP 完全の境界を明らかにした.

$\mathrm{pe}(P)$ \ $\mathrm{pe}(T)$	≤ 1	2	≥ 3
≤ 1		P	
2			NPC
≥ 3			

テーブル 4: パス離心数

$\mathrm{pw}(P)$ \ $\mathrm{pw}(T)$	≤ 1	2	≥ 3
≤ 1		P	
2		NPC	
≥ 3			

テーブル 5: パス幅

- それぞれ，$\mathrm{pe}(T) \leq 3, \mathrm{pe}(P) \leq 2$ あるいは，$\mathrm{pw}(T), \mathrm{pw}(P) \leq 3$ でも NP 完全であることを示した.
- 木 P がキャタピラならば多項式時間で解けることを示した.
- $\mathrm{pe}(T), \mathrm{pe}(P) = 2$ ならば多項式時間で解けることを示した.

「P がキャタピラ」から少し緩めただけで，NP 完全になってしまう.

まとめ

木 T は木 P をマイナーとして含むか？という問題を考えて，直径・パス離心数・パス幅上を制限したときの計算量をすべて明らかにした．

$\mathrm{diam}(P)$ \ $\mathrm{diam}(T)$	≤ 3	4	5	≥ 6
≤ 3	P	P	P	P
4		P	P	NPC
5			P	NPC
≥ 6				NPC

$\mathrm{pe}(P)$ \ $\mathrm{pe}(T)$	≤ 1	2	≥ 3
≤ 1	P	P	P
2		P	NPC
≥ 3			NPC

$\mathrm{pw}(P)$ \ $\mathrm{pw}(T)$	≤ 1	2	≥ 3
≤ 1	P	P	P
2		NPC	NPC
≥ 3			NPC

キャタピラ（pe, pw が 1 以下）から緩めるとすぐに NP 完全になる．
キャタピラ周辺の何らかの構造が本質的に効いているように見え，
それを明らかにできると嬉しい．

付録：直径 6, 4 の NP 困難性の帰着の簡単な説明 (1)

新たに以下の set cover の変種を定義し，これを経由して示した．

Inclusive Set Cover

入力：集合 $U = \{1, 2, \ldots, n\}$，集合族 $\mathcal{S} \subseteq 2^U$，整数 k.
質問：$\mathcal{S}$ から高々 k 個の集合 $S_1, S_2, \ldots, S_k$ を選び，$U \subseteq \bigcup_i S_i$ にできるか？ただし，選ぶ前に好きな $x \in S \in \mathcal{S}$ を x 以下の整数で置き換える操作を何度でもできる.

たとえば，$U = \{1, 2, 3, 4\}$ として，集合 $\{1, 3\}, \{3, 4\}$ を選ぶと，set cover としてはカバーできていない.

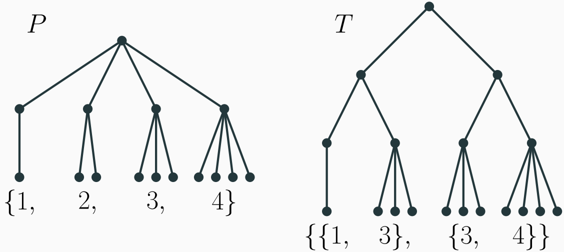
しかし Inclusive Set Cover ではどちらかの 3 を 2 に置き換えることで，カバーできる.

付録：直径 6, 4 の NP 困難性の帰着の簡単な説明 (2)

Inclusive Set Cover

入力：集合 $U = \{1, 2, \ldots, n\}$，集合族 $\mathcal{S} \subseteq 2^U$，整数 k.
質問：$\mathcal{S}$ から高々 k 個の集合 $S_1, S_2, \ldots, S_k$ を選び，$U \subseteq \bigcup_i S_i$ にできるか？ただし，選ぶ前に好きな $x \in S \in \mathcal{S}$ を x 以下の整数で置き換える操作を何度でもできる．

「$y \in U$ を $x \in S \in \mathcal{S}$ でカバーする」は，「子が y 個のスター」を「子が x 個のスター」へマイナーとして埋め込むことで表現できる．
各 $S = \{s_1, s_2, \ldots\} \in \mathcal{S}$ に対して，子が $s_1, s_2 \ldots$ 個のスターたちからなる部分木を作って，ガジェットで k 個選ぶことを強制する．



付録: ラベル付き Tree Minor Containment における困難性

ラベル付き Tree Minor Containment は Tree Inclusion と呼ばれる.

Tree Inclusion

入力： 根付き・ラベル付き木 T, P.
質問：木 T に辺縮約を繰り返し，P に（ラベルまで）一致させられるか？ただし，辺縮約した際，新たな頂点のラベルは根側の頂点のラベルになる.

たとえば我々の Inclusive Set Cover からの帰着と同様に set cover から帰着すると，P が star でも NP 困難になる.

Akutsu et al., 2021[6]

T, P の深さをそれぞれ $2, 1$ 以下に制限しても，Tree Inclusion は NP 完全.

[6] https://doi.org/10.1016/j.tcs.2021.06.013